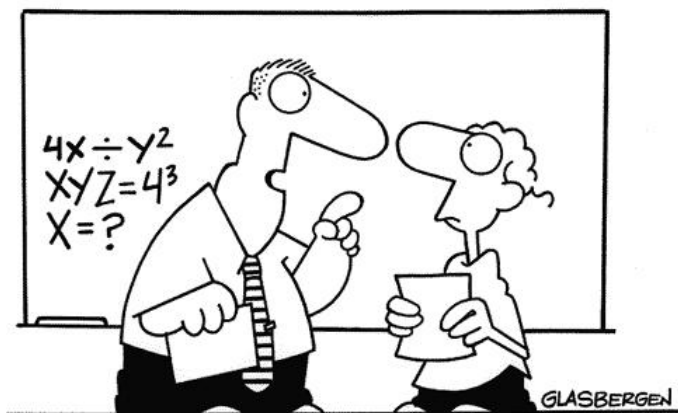


Algèbre bilinéaire
ABCML3

Année universitaire 2015-2016



“Algebra class will be important to you later in life because there’s going to be a test six weeks from now.”

Joanna Bodgi Tarazi

Table des matières

Références bibliographiques	5
Rappels	7
1 Matrices par blocs	13
1.1 Généralités	13
1.2 Opérations sur les matrices par blocs	14
1.2.1 Addition	14
1.2.2 Multiplication par un scalaire	15
1.2.3 Multiplication de matrices	15
1.3 Matrices par blocs particulières	16
2 Réduction des endomorphismes et des matrices	19
2.1 Éléments propres	19
2.2 Polynômes caractéristiques	23
2.3 Diagonalisation	27
2.4 Trigonalisation	31
3 Réduction des endomorphismes et des matrices- niveau 2	35
3.1 Stabilité d'un sev par un endomorphisme	35
3.2 Polynômes d'un endomorphisme et d'une matrice	37
3.3 Sous-espaces caractéristiques	44
3.4 Applications de la réduction d'une matrice	49
4 Dualité	53
4.1 Espace dual	53
4.1.1 Introduction et généralités	53
4.1.2 Changement de base	55
4.2 Orthogonalité	57
4.3 Espace bidual	61

4.4	Hyperplans	64
4.5	Transposition	65
5	Formes bilinéaires - formes quadratiques	71
5.1	Formes bilinéaires symétriques (fbs)	71
5.2	Formes quadratiques	75
5.3	Orthogonalité relativement à une fbs (ou à une fq associée)	79
6	Espaces euclidiens	89
6.1	Produit scalaire	89
6.2	Orthogonalité	91
6.3	Endomorphismes remarquables	99
6.3.1	Endomorphismes orthogonaux - matrices orthogonales	99
6.3.2	Endomorphismes symétriques	100

Références bibliographiques

1. Algèbre 1 - Cours et 600 exercices corrigés - 1^{ère} année, Jean-Marie MONIER, DUNOD.

Rappels

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , parfois \mathbb{Q} .

$$\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Loi de composition interne (lci) sur un ensemble E :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

3. Loi de composition externe (lce) sur un ensemble E :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

4. Soit E un ensemble, $+$ une lci sur E et \cdot une lce sur E . $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} -ev) si, et seulement si,

- $(E, +)$ est un groupe abélien : $+$ est commutative, associative, admet un élément neutre noté 0_E , et tout $x \in E$ est symétrisable de symétrique noté $-x$ et appelé l'opposé de x .
- La loi \cdot vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \alpha \cdot (x + y) &= \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x &= \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\alpha\beta) \cdot x &= \alpha \cdot (\beta \cdot x) = \beta \cdot (\alpha \cdot x) \\ \forall x \in E, 1 \cdot x &= x \end{aligned}$$

Les éléments de E s'appellent les vecteurs.

Les éléments de \mathbb{K} s'appellent les scalaires.

5. Soit E un \mathbb{K} -ev et F une partie de E .

$$\begin{aligned} F \text{ est un sev de } E &\iff \left\{ \begin{array}{l} F \text{ est un sous-groupe de } E \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F, x + y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} F \neq \emptyset \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 0_E \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha \cdot (x + y) \in F \end{array} \right. \end{aligned}$$

6. Soit E un \mathbb{K} -ev et $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ une partie finie de E .

Une combinaison linéaire d'éléments de X est tout vecteur de E de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, avec pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Si X est infinie, une combinaison linéaire d'éléments de X est tout vecteur de E de la forme $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in X$.

7. Soit E un \mathbb{K} -ev et X une partie de E . Le sev engendré par X , noté $Vect(X)$, est l'intersection de tous les sev de E contenant X . $Vect(X)$ est le plus petit (pour \subseteq) sev de E contenant X . De plus, $Vect(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

8. Soient F et G deux sev d'un \mathbb{K} -ev E .

– $F + G = Vect(F \cup G)$

– $F + G = \{z \in E ; \exists(x, y) \in F \times G, z = x + y\}$.

$F + G$ est directe $\iff \forall z \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G ; z = x + y$

– $\iff \forall(x, y) \in F \times G, (x + y = 0 \iff x = y = 0)$

$\iff F \cap G = \{0_E\}$

On note dans ce cas $F + G = F \oplus G$.

– F et G sont dits supplémentaires si, et seulement si, $E = F \oplus G$.

9. Soient E un \mathbb{K} -ev et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

– B est libre si, et seulement si,

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0 \implies (\forall i \in \mathbb{N}_n, \alpha_i = 0) \right)$$

– Une famille est liée si elle n'est pas libre.

B est liée si, et seulement si, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$.

– Les vecteurs d'une famille libre (resp. liée) s'appellent des vecteurs linéairement indépendants (resp. dépendants).

– Deux vecteurs linéairement dépendants sont dits colinéaires.

– Une famille est liée si, et seulement si, l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

10. Soit X une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On dit que X est une famille génératrice de E si, et seulement si, $E = Vect(X)$.

11. On dit que B est une base d'un \mathbb{K} -ev E si, et seulement si, B est une famille libre et génératrice de E .

12. – Un \mathbb{K} -ev E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

– Si E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie, alors il admet au moins une base et toutes les bases ont le même cardinal.

– Si E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie, on appelle dimension de E , et on note $dim_{\mathbb{K}} E$, le cardinal d'une base quelconque de E .

– $dim_{\mathbb{K}} \{0_E\} = 0$.

– Soit F un sev d'un \mathbb{K} -ev de dimension finie E .

Alors F est de dimension finie et $dim F \leq dim E$. On a l'égalité si, et seulement si, $F = E$:

$$F = E \iff \begin{cases} F \subset E \\ dim F = dim E \end{cases}$$

- Si E est un \mathbb{K} -ev de dimension fini, F et G deux sev de E , alors $F + G$ est de dimension finie et

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

13. – Soient E et F deux \mathbb{K} -ev et $u : E \rightarrow F$.

$$\begin{aligned} u \text{ linéaire (morphisme d'ev)} &\iff \begin{cases} \forall x, y \in E, u(x + y) = u(x) + u(y) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, u(\lambda x) = \lambda u(x) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u(0_E) = 0 \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) \end{cases} \\ &\iff \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, u(\lambda x + \gamma y) = \lambda u(x) + \gamma u(y) \end{aligned}$$

- Soient E et F des \mathbb{K} -ev, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
- Soient E et F des \mathbb{K} -ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall x_1, \dots, x_n \in E, u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i)$$

- Soit E un \mathbb{K} -ev, alors $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ est appelé un endomorphisme de E .
- Soient E et F deux \mathbb{K} -ev. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si u est bijective, on dit que u est un isomorphisme de E sur F . On note $Isom(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F . On dit que E est isomorphe à F et on note $E \simeq F$ si, et seulement si, il existe un isomorphisme de E sur F .
- Soit E un \mathbb{K} -ev. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si u est bijective (*i.e.* $u \in Isom(E, E)$), on dit que u est un automorphisme de E . On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

14. – Une matrice est une application

$$\begin{aligned} A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) &\longmapsto a_{ij} \end{aligned}$$

Elle est représentée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On dit que A a m lignes et n colonnes.

On note $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à valeurs dans \mathbb{K} et ayant m lignes et n colonnes.

- On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à valeurs dans \mathbb{K} et ayant n lignes et n colonnes. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n , et les termes a_{ii} avec $i \in \mathbb{N}_n$ sont les termes de la diagonale principale.
- On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles.

15. Soient E et F deux \mathbb{K} -ev de dimensions finies, $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_m)$ des bases respectives de E et F , et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- La matrice de u dans les bases B et B' est notée $M(u; B, B')$, et est donnée par :

$$M(u; B, B') = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix}$$

où $u(e_j) = \sum_{i=1}^m u_{ij}e'_i$ pour tout $j \in \mathbb{N}_n$.

- Soient $x \in E$, et $y \in F$.

Donc $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x_i \in \mathbb{K}$, et $y = \sum_{i=1}^m y_i e'_i$, tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, $y_i \in \mathbb{K}$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$.

On a :

$$Y = AX \iff y = u(x)$$

- $\mathcal{L}(E, F)$ est isomorphe à $M_{m,n}(\mathbb{K})$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto M(u; B, B') \end{aligned}$$

est un isomorphisme (pour des bases B et B' fixées).

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{K})$.

- Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Alors,

v est bijective si, et seulement si, $M(v; B)$ est inversible

Dans ce cas $M(v^{-1}; B) = (M(v; B))^{-1}$.

16. Changement de bases.

- Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, B et B' deux bases de E . On appelle matrice de passage de B à B' la matrice notée et définie par :

$$P_{BB'} = M(\text{Id}_E; B', B)$$

$P_{BB'}$ est inversible et $P_{BB'}^{-1} = P_{B'B}$.

- Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E , et $x \in E$.

Il existe $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n \in \mathbb{K}$, tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Alors,

$$X = P_{BB'} X'$$

- Soient E et F des \mathbb{K} -espace vectoriels de dimension finie, B et B' deux bases de E , B_1 et B'_1 deux bases de F , $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = M(u; B, B_1)$ et $A' = M(u; B', B'_1)$. Alors on a :

$$A' = P_{B'_1 B_1} A P_{BB'}$$

17. Opération sur les matrices.

- Produit d'un scalaire et d'une matrice.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

- Somme de deux matrices.

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

- Produit de deux matrices.

Soient $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

$C = AB = (c_{ik}) \in M_{m,p}(\mathbb{K})$, tel que $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ pour tout $(i, k) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_p$.

◇ Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a + 2d + 3g & b + 2e + 3h & c + 2f + 3i \\ 4a + 5d + 6g & 4b + 5e + 6h & 4c + 5f + 6i \end{pmatrix}$$

18. Transposée d'une matrice.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle la matrice transposée de la matrice A , la matrice notée et définie par :

$${}^tA = (b_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{K}) ; \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m, b_{ij} = a_{ji}$$

19. Déterminant d'une matrice (carrée).

$$- \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{K}.$$

$$- \text{Soit } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}).$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - gf) + c(dh - ge) \\ &= aei - afh - bdi + bgf + cdh - cge \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ce) \\ &= aei - afh - bdi + cdh + bgf - cge \end{aligned}$$

Chapitre 1

Matrices par blocs

1.1 Généralités

Définition 1 :

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle bloc de la matrice A toute restriction de A à $I \times J$ où $I \subset \mathbb{N}_m$ et $J \subset \mathbb{N}_n$, I et J étant formés d'entiers consécutifs.

◇ *Exemple :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \end{pmatrix} \in M_{5,6}(\mathbb{R})$$

$I = \{2, 3\} \subset \mathbb{N}_5$, $J = \{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}_6$ sont formés par des entiers consécutifs.

$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$ est donc un bloc de la matrice A .

Définition 2 :

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On peut écrire A de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & \dots & A_{ts} \end{pmatrix}$$

où $s, t \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_t \times \mathbb{N}_s$, $A_{ij} \in M_{m_i, n_j}(\mathbb{K})$, avec $m_i, n_j \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^t m_i = m$, et

$$\sum_{j=1}^s n_j = n.$$

Les A_{ij} sont les blocs. C'est une décomposition de A par blocs.

◇ Exemples :

$$1. A = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \text{ est une décomposition par blocs de } A.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ peut s'écrire } A = \begin{pmatrix} x_1 \\ X \end{pmatrix} \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n-1,1}(\mathbb{K}).$$

Convention :

Si A est une matrice carrée, on considère les décompositions par blocs telles que :

- $s = t$, i.e. le nombre de blocs par ligne est égal au nombre de blocs par colonne,
- pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, $n_i = m_i$, i.e. les blocs A_{ii} pour $i \in \mathbb{N}_s$ sont des matrices carrées.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ & \ddots & \\ A_{s1} & \dots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, les A_{ii} s'appellent les blocs diagonaux.

◇ Exemples :

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{array} \right), \quad A' = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

1.2 Opérations sur les matrices par blocs

1.2.1 Addition

Soient $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Pour faire l'addition en utilisant la décomposition par blocs, il faut que A et B aient le même nombre s de blocs par ligne et le même nombre t de blocs par colonnes. De plus, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_t \times \mathbb{N}_s$, $A_{ij}, B_{ij} \in M_{m_i, n_j}(\mathbb{K})$, avec $\sum_{i=1}^t m_i = m$ et $\sum_{i=1}^s n_i = n$.

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & \dots & A_{ts} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \dots & B_{ts} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \dots & A_{1s} + B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{t1} + B_{t1} & \dots & A_{ts} + B_{ts} \end{pmatrix}$$

1.2.2 Multiplication par un scalaire

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On considère la décomposition par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & \dots & A_{ts} \end{pmatrix}$$

où $t, s \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_t \times \mathbb{N}_s$, $A_{ij} \in M_{m_i, n_j}(\mathbb{K})$, avec $\sum_{i=1}^t m_i = m$ et $\sum_{i=1}^s n_i = n$.

Alors,

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \dots & \lambda A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{t1} & \dots & \lambda A_{ts} \end{pmatrix}$$

1.2.3 Multiplication de matrices

Soient $A = (a_{ik}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{kj}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C = AB = (c_{ij}) \in M_{m,p}(\mathbb{K})$. Alors pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_p$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

On considère les décompositions par blocs suivantes :

$A = (A_{ik})$ où $i \in \mathbb{N}_t$ et $k \in \mathbb{N}_s$, et pour tout $(i, k) \in \mathbb{N}_t \times \mathbb{N}_s$, $A_{ik} \in M_{m_i, n_k}$, avec $m_i, n_k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^t m_i = m$ et $\sum_{k=1}^s n_k = n$,

$B = (B_{kj})$ où $k \in \mathbb{N}_s$ et $j \in \mathbb{N}_q$, et pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}_s \times \mathbb{N}_q$, $B_{kj} \in M_{n_k, p_j}$, avec $n_k, p_j \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^s n_k = n$ et $\sum_{j=1}^q p_j = p$.

Donc $C = (C_{ij})$ avec $i \in \mathbb{N}_t$, $j \in \mathbb{N}_q$ et $C_{ij} = \sum_{k=1}^s A_{ik} B_{kj}$.

Ainsi, il faut pouvoir multiplier A_{ik} et B_{kj} , donc $A_{ik} \in M_{m_i, n_k}$ et $B_{kj} \in M_{n_k, p_j}$.

Par suite $C_{ij} \in M_{m_i, p_j}$.

◇ Exemple :

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, avec pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $A_{ij} \in M_{m_i, n_j}$

$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, avec pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $B_{ij} \in M_{n_i, p_j}$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

1.3 Matrices par blocs particulières

Matrices diagonales par blocs :

Définition 3 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice diagonale par blocs s'il existe une décomposition par blocs de A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{ss} \end{pmatrix}$$

où $s \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, $A_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{K})$, avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{i=1}^s n_i = n$

◇ Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrices triangulaires par blocs :

Définition 4 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) par blocs s'il existe une décomposition par blocs de A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{s-1,s} \\ 0 & \dots & 0 & A_{ss} \end{pmatrix}$$

resp.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{s1} & \dots & A_{s,s-1} & A_{ss} \end{pmatrix}$$

où $s \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, $A_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{K})$, et pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_{s-1} \times \{i+1, \dots, s\}$ (resp. $(i, j) \in \{2, \dots, s\} \times \mathbb{N}_{i-1}$), $A_{ij} \in M_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$, avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{i=1}^s n_i = n$.

◇ Exemple :

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :

Propriété 5 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs. Son déterminant est donné par

$$\det A = \prod_{i=1}^s \det A_{ii}$$

où $s \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de blocs par ligne (ou par colonne) et A_{ii} pour $i \in \mathbb{N}_s$ sont les blocs diagonaux.

Preuve :

Démonstration dans un cas particulier :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \text{ avec } A \in M_p(\mathbb{R}), B \in M_q(\mathbb{R}) \text{ et } C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$$

On cherche à démontrer que $\det M = \det A \det B$.

M s'écrit de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose } M_1 = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

On a que $\det M = \det M_1 \det M_2$. Démontrons que $\det M_1 = \det B$ et $\det M_2 = \det A$.

Pour $\det M_1$: on développe suivant la première ligne et on itère, on obtient

$$\det M_1 = \det B$$

Pour $\det M_2$: on développe suivant la dernière ligne et on itère, on obtient

$$\det M_2 = \det A$$

D'où

$$\det M = \det A \det B$$

★ Remarque :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs. On note A_{ii} ses blocs diagonaux avec $i \in \mathbb{N}_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de blocs par ligne (ou par colonne).

A est inversible si, et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, A_{ii} est inversible.

En effet A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \det A \neq 0 &\iff \prod_{i=1}^s \det A_{ii} \neq 0 \\ &\iff \forall i \in \mathbb{N}_s, \det A_{ii} \neq 0 \end{aligned}$$

Donc A est inversible si, et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_s$, A_{ii} est inversible.

De plus, dans ce cas A^{-1} est de la forme :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{s-1,s} \\ 0 & \dots & 0 & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}$$

où pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_{s-1} \times \{i+1, s\}$, $B_{ij} \in M_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$, avec $\sum_{i=1}^s n_i = n$.

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes et des matrices

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (parfois \mathbb{Q}).

2.1 Eléments propres

Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

On notera dans la suite 0 le vecteur colonne $0_{n,1}$.

Définitions 1 :

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre (vp) de u (resp. de A) s'il existe $x \neq 0_E$ (resp. $X \neq 0$) tel que $u(x) = \lambda x$ (resp. $AX = \lambda X$).
2. On dit que $x \neq 0_E$ est un vecteur propre (\vec{vp}) de u (resp. A) s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ (resp. $AX = \lambda X$).
Si $u(x) = \lambda x$ ($x \neq 0_E$), on dit que x est un \vec{vp} associé à la vp λ .

★ *Remarques :*

1. Une vp $\lambda \in \mathbb{K}$ de u associée à un \vec{vp} $x \in E$ est unique.
En effet, $u(x) = \lambda x$. Supposons qu'il existe $\mu \in \mathbb{K}$, tel que $u(x) = \mu x$.
 $\lambda x = \mu x \implies (\lambda - \mu)x = 0_E$ (avec $x \neq 0_E$) $\implies \lambda - \mu = 0 \implies \lambda = \mu$.
2. Un \vec{vp} $x \in E$ de u associé à la vp $\lambda \in \mathbb{K}$ n'est pas unique.
En effet, $u(x) = \lambda x$.
 $u(2x) = 2u(x) = 2\lambda x = \lambda(2x)$ avec $2x \neq 0_E$. Donc $2x$ est un \vec{vp} de u associé à λ .

Définition 2 :

On appelle spectre de u (resp. A) et on note $Sp(u)$ (resp. $Sp(A)$) l'ensemble des vp de u (resp. A).

$$Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$$

★ Remarque :

Soit $A = M(u; B)$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ vp de } u &\iff \exists x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \neq 0_E ; u(x) = \lambda x \\ &\iff \exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0 ; AX = \lambda X \\ &\iff \lambda \text{ vp de } A \end{aligned}$$

Notations :

$e = id_E$ et $I = I_n$.

Caractérisation des vp :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ vp de } u &\iff \exists x \neq 0_E ; u(x) = \lambda x \iff \exists x \neq 0 ; (u - \lambda e)(x) = 0 \\ &\iff Ker(u - \lambda e) \neq \{0_E\} \iff u - \lambda e \text{ non injectif} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \text{ vp de } A &\iff Ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \\ &\iff A - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff det(A - \lambda I) = 0 \\ &\iff rg(A - \lambda I) < n \end{aligned}$$

Cas particulier :

$$0 \text{ vp de } u \iff Ker u \neq \{0_E\} \iff u \text{ non injectif}$$

$$\begin{aligned} 0 \text{ vp de } A &\iff Ker A \neq \{0\} \\ &\iff A \text{ non inversible} \\ &\iff det A = 0 \\ &\iff rg A < n \end{aligned}$$

Sous-espaces propres :

Définition 3 :

$u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$.

On appelle sous-espace propre de u associé à λ le sev de E , noté $SEP(u, \lambda)$ ou $E_\lambda(u)$, et défini par :

$$SEP(u, \lambda) = E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda e) = \{x \in E ; u(x) = \lambda x\} = \{\vec{v} \text{ associés à } \lambda\} \cup \{0_E\}$$

Rappel :

Soit F un sev de E .

$$(F \text{ est stable par } u) \iff u(F) \subset F \iff (\forall x \in F, u(x) \in F).$$

Proposition 4 :

Soit $\lambda \in Sp(u)$. Alors, $E_\lambda(u)$ est stable par u .

Preuve :

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda(u) &\iff u(x) = \lambda x \implies u(u(x)) = u(\lambda x) \implies u(u(x)) = \lambda u(x) \\ &\implies (u - \lambda e)(u(x)) = 0 \implies u(x) \in E_\lambda(u) \end{aligned}$$

Donc $u(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$.

◇ Exemples :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ fini. Déterminer les vp et \vec{vp} de la fonction :

$$\begin{aligned} h_\alpha : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \alpha x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda \text{ vp de } h_\alpha) &\iff (\exists x \neq 0_E ; h_\alpha(x) = \lambda x) \iff (\exists x \neq 0_E ; \alpha x = \lambda x) \\ &\iff (\exists x \neq 0_E ; (\alpha - \lambda)x = 0_E) \iff \lambda = \alpha \end{aligned}$$

Donc $Sp(h_\alpha) = \{\alpha\}$.

$$(x \vec{vp} \text{ de } h_\alpha) \iff (x \neq 0_E \text{ et } h_\alpha(x) = \alpha x) \iff x \in E - \{0_E\}.$$

$$E_\alpha(u) = SEP(u, \lambda) = E.$$

2. Trouver les vp et \vec{vp} de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

$$\lambda \text{ vp de } A \iff \exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0 ; AX = \lambda X$$

$$\iff \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n - 0_{\mathbb{K}^n} ; \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_1 & (1) \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

• Si $\lambda = 0$, (1) $\implies x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

$$\text{Donc } \lambda = 0 \text{ est vp de } A \text{ et } SEP(A, 0) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \right\} \text{ (hy-}$$

perplan de dimension $n - 1$).

• Si $\lambda \neq 0$,

$$\lambda x_1 = \lambda x_2 = \dots = \lambda x_n \implies x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

$$(1) \implies nx_1 = \lambda x_1 \quad (2)$$

Or,

$$X \neq 0 \implies (\exists i \in \mathbb{N}_n ; x_i \neq 0) \xrightarrow{(2)} (\forall i \in \mathbb{N}_n, x_i \neq 0)$$

$$(2) \implies \lambda = n$$

$$\text{Donc } \lambda = n \text{ est une vp de } A \text{ et } SEP(A, n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K} \right\}$$

Proposition 5 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des vp deux à deux distinctes de u et x_1, \dots, x_p des $\vec{v}\hat{p}$ de u associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ respectivement, alors :

1. (x_1, \dots, x_p) est une famille libre.
2. $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Preuve :

1. Par récurrence sur $p \geq 1$.

· Pour $p = 1$,

$x_1 \vec{v}\hat{p}$ associé à $\lambda_1 \implies x_1 \neq 0 \implies (x_1)$ est libre.

· Supposons le résultat vrai pour $(p-1)$ vp distinctes et démontrons le résultat pour p .

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$; $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0_E$ (*).

u linéaire $\implies u\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i\right) = 0_E \implies \sum_{i=1}^p \alpha_i u(x_i) = 0_E$.

$x_i \vec{v}\hat{p} \implies \sum_{i=1}^p (\alpha_i \lambda_i) x_i = 0_E$ (**).

Donc

$$(*) \implies \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{p-1} x_{p-1} + \alpha_p x_p = 0_E \quad (1)$$

$$(**) \implies (\alpha_1 \lambda_1) x_1 + \dots + (\alpha_{p-1} \lambda_{p-1}) x_{p-1} + (\alpha_p \lambda_p) x_p = 0_E \quad (2)$$

$$\lambda_p(1) - (2) \implies \alpha_1 (\lambda_p - \lambda_1) x_1 + \dots + \alpha_{p-1} (\lambda_p - \lambda_{p-1}) x_{p-1} = 0_E.$$

$$(\text{HR}) \implies ((x_1, \dots, x_{p-1}) \text{ est libre}) \implies (\forall i \in \mathbb{N}_{p-1}, \alpha_i (\lambda_p - \lambda_i) = 0) \implies (\forall i \in \mathbb{N}_{p-1}, \alpha_i = 0)$$

car $\lambda_i \neq \lambda_p$

De plus,

$$(1) \implies \alpha_p x_p = 0 \implies \alpha_p = 0 \text{ (car } x_p \text{ est un } \vec{v}\hat{p}\text{)}.$$

Ainsi, tous les α_i sont nuls et (x_1, \dots, x_p) est une famille libre.

2. Soit $(y_1, \dots, y_p) \in \prod_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ tels que $\sum_{i=1}^p y_i = 0$.

Supposons qu'il existe des y_i non nuls. On note p_0 leur nombre ($1 \leq p_0 \leq p$) et on suppose qu'il s'agit de y_1, \dots, y_{p_0} . Or comme ce sont des vecteurs non nuls de SEP de u alors ce sont des $\vec{v}\hat{p}$ associés à des vp deux à deux distinctes. Par suite (y_1, \dots, y_{p_0}) est une famille libre.

D'autre part, $0 = \sum_{i=1}^p y_i = \sum_{i=1}^{p_0} y_i$. Par suite (y_1, \dots, y_{p_0}) est une famille liée, contradiction.

Par suite, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $y_i = 0$ et $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$.

★ Remarque :

$\bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ n'est pas nécessairement égale à E .

2.2 Polynômes caractéristiques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie $n \geq 1$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Définition 6 :

On appelle polynôme caractéristique de u (resp. A) le polynôme noté et défini par :

$$\pi_u(X) = \det(u - Xe) \quad (\text{resp. } \pi_A(X) = \det(A - XI)), \quad \text{avec } X \in \mathbb{K}$$

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ alors } \pi_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$$

Proposition 7 :

π_u (resp. π_A) est un polynôme de degré n , et on a :

$$\pi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + \det A$$

★ Remarques :

1. $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
2. $(-1)^n X^n$ provient du terme produit des éléments de la diagonale principale.
3. $\det A$ est la constante car $\pi_A(0) = \det A$.
4. Dans la pratique, on écrira :

$$\pi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

◇ Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}).$$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K}, \pi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= (-1)^2 \lambda^2 + (-1) \text{tr}(A)\lambda + \det A \end{aligned}$$

Théorème 8 :

Les racines du polynôme caractéristique de u (resp. de A) sont les vp de u (resp. de A).

Preuve :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une vp de } u &\iff A - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I) = 0 \\ &\iff \pi_A(\lambda) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ est une racine de } \pi_A \end{aligned}$$

Rappel :

Deux matrices A et A' de $M_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables ($A \sim A'$) si, et seulement si, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A' = P^{-1}AP$.

Proposition 9 :

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Preuve :

Soient $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ tels que $A \sim A'$. Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A' = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} A' = P^{-1}AP &\implies \forall \lambda \in \mathbb{K}, \pi_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P \\ &= \pi_A(\lambda) \\ &\implies \pi_A = \pi_{A'} \end{aligned}$$

* Conséquence :

Deux matrices semblables ont les mêmes vp.

Définition 10 :

Soit λ une vp de u (resp. A). On appelle ordre de multiplicité de λ , son ordre de multiplicité en tant que racine de π_u (resp. π_A).

Théorème 11 :

Soit $\lambda \in Sp(u)$ (resp. $\lambda \in Sp(S)$), d'ordre de multiplicité $n_0 \geq 1$.

Alors $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq n_0$ (resp. $1 \leq \dim SEP(A, \lambda) \leq n_0$).

Preuve :

- Démontrons que $\dim E_\lambda(u) \geq 1$:
 λ vp de $u \implies \exists x \in E, x \neq 0 ; x \in E_\lambda(u) \implies E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$
 $\implies \dim E_\lambda(u) \geq 1$
- Démontrons que $\dim E_\lambda(u) \leq n_0$:
 Soit $p = \dim E_\lambda(u)$. $\dim E_\lambda(u)$ étant un sev de E , $p \leq n$.
 Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $E_\lambda(u)$, complétée en une base $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E .
 Comme pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $e_i \in E_\lambda(u)$, alors $u(e_i) = \lambda e_i$. Par suite la matrice de u dans la base B s'écrit de la forme :

$$A = M(u, B) = \begin{pmatrix} \lambda I_p & M \\ 0 & L \end{pmatrix}$$

où $M \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $L \in M_{n-p}(\mathbb{K})$.

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \pi_u = \pi_A = \det(A - XI_n) &= \begin{vmatrix} (\lambda - X)I_p & M \\ 0 & L - XI_{n-p} \end{vmatrix} \\ &= \det((\lambda - X)I_p) \det(L - XI_{n-p}) \\ &= (\lambda - X)^p \pi_L(X) \end{aligned}$$

$\pi_L(X)$ étant un polynôme, alors $(\lambda - X)^p$ divise π_u . Donc λ est une racine de π_u d'ordre supérieur ou égal à p .

λ est une racine de π_u d'ordre n_0 . D'où $n_0 \geq p$.

Ainsi, $\dim E_\lambda(u) \leq n_0$.

* Conséquence :

Si λ est une vp simple de u , alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

En effet, d'après le théorème précédent, $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq 1$.

◇ Exemples :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, et E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 1$. Trouver les vp et \vec{v} de

$$\begin{aligned} h_\alpha : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \alpha x \end{aligned}$$

Solution :

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

$\forall i \in \mathbb{N}_n, h_\alpha(e_i) = \alpha e_i$.

$$A = M(h_\alpha, B) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \pi_{h_\alpha}(\lambda) = \pi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^n$$

Ainsi $\lambda = \alpha$ est une racine d'ordre n de π_{h_α} . C'est donc l'unique vp de h_α (ordre n).

De plus, pour tout $x \in E, h_\alpha(x) = \alpha x = \lambda x$, donc $x \in SEP(h_\alpha, \alpha)$. D'où $E \subset SEP(h_\alpha, \alpha)$ et $E = SEP(h_\alpha, \alpha)$.

2. Trouver les vp et \vec{v} de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\pi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Donc $\lambda = 5$ est une vp simple et $\lambda = -1$ est une vp double.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff (A - \lambda I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 5$:

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

$$\text{Donc } X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } SEP(A, 5) = Vect\ u \text{ avec } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, $u \neq 0$, par suite (u) est libre, et c'est une base de $SEP(A, 5)$.

Pour $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff z = -x - y$$

$$\text{Donc } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } SEP(A, -1) = Vect(v, w), \text{ où } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De plus, v et w sont non colinéaires, donc (v, w) est libre, c'est donc une base de $SEP(A, -1)$.

2.3 Diagonalisation

E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 1$.

Définition 12 :

1. $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable s'il existe une base B de E tel que $M(u; B)$ soit diagonale.
2. $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists D \in D_n(\mathbb{K}), P \in GL_n(\mathbb{K}) ; D = P^{-1}AP$$

★ Remarques :

1. Il existe des matrices et des endomorphismes non diagonalisables. Nous verrons par la suite les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme ou une matrice soient diagonalisables.
2. Toute matrice diagonale est diagonalisable ($P = I$).
3. Si B est une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M(u; B)$, alors $\pi_u = \pi_A$.

En effet :

Si $A = M(u; B)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A - \lambda I = M(u - \lambda e; B)$, et $\det(A - \lambda I) = \det(u - \lambda e)$.

Par suite, $\pi_A = \pi_u$.

Propriété 13 :

Si B est une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M(u; B)$, alors :

u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable

Preuve :

- Supposons que u est diagonalisable.
 u est diagonalisable donc il existe une base B' de E telle que $D = M(u; B')$ soit diagonale.
 Soit $P = P_{BB'}$, alors $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = P^{-1}AP$. Par suite A est diagonalisable.
- Supposons que A est diagonalisable.
 Si A est diagonalisable, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in D_n(\mathbb{K})$ tels que $D = P^{-1}AP$.
 Soit B' la base de E définie par $P_{BB'} = P$. Alors $D = M(u; B')$, et u est donc diagonalisable.

Théorème 14 :

Caractérisation de la diagonalisation

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est diagonalisable.
- (ii) Il existe une base de E formée de \vec{v}_p de u .
- (iii) $E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.
- (iv) $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$

Preuve :

- Supposons que (i) est vérifiée.

u est diagonalisable donc il existe une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $M(u; B)$ soit diagonale. Donc

$$M(u; B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $e_i \neq 0$ (élément d'une base). Donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, e_i est un \vec{v}_p de u . Donc B est une base formée de \vec{v}_p de u .

- Supposons que (ii) est vérifiée.

Comme $\sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ est un sev de E , il suffit de démontrer que $E \subset \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.

D'après (ii), il existe une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E formée de \vec{v}_p de u . Soit pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, λ_i la vp de u associée à e_i (les λ_i ne sont pas nécessairement deux à deux distinctes).

Soit $x \in E$. Comme B est une base de E , alors $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x_i \in \mathbb{K}$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $e_i \in E_{\lambda_i}(u)$, donc $x_i e_i \in E_{\lambda_i}(u) \subset \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.

Par suite $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$, et $E \subset \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.

D'où l'égalité.

- Supposons que (iii) est vérifiée.

On note $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, $1 \leq p \leq n$, où les λ_i sont deux à deux distinctes.

Alors $E = \sum_{i=1}^n E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(u)$.

Par suite $\dim E = \sum_{i=1}^n \dim E_{\lambda_i}(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$.

- Supposons que (iv) est vérifiée.

On note $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, $1 \leq p \leq n$, où les λ_i sont deux à deux distinctes.

Par suite $\sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = \sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$

Notons $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, où les λ_i sont deux à deux distinctes, et pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $d_i = d_{\lambda_i}$ l'ordre de multiplicité de λ_i et $w_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $1 \leq w_i \leq d_i$.

Or π_u étant scindé, $\pi_u = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{d_i}$.

Par suite, $\dim E = \deg \pi_u = \sum_{i=1}^p d_i$.

u étant diagonalisable, $\dim E = \sum_{i=1}^p w_i$.

Par suite $\sum_{i=1}^p d_i = \sum_{i=1}^p w_i$, avec pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $w_i \leq d_i$.

Si pour $j \in \mathbb{N}_p$, $d_j \neq w_j$, alors $w_j < d_j$ et par suite $\sum_{i=1}^p w_i < \sum_{i=1}^p d_i$ et on n'aurait plus l'égalité.

Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $w_i = d_i$.

• Supposons que π_u est scindé et que pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $\dim E_{\lambda}(u) = d_{\lambda}$,

Notons $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, où les λ_i sont deux à deux distinctes, et pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $d_i = d_{\lambda_i}$ l'ordre de multiplicité de λ_i et $w_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$.

π_u étant scindé, $\pi_u = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{d_i}$.

Ainsi, $\dim E = \deg \pi_u = \sum_{i=1}^p d_i = \sum_{i=1}^p w_i$.

Par suite, $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_{\lambda}(u)$ et u est diagonalisable.

Théorème 16 :

Condition suffisante de diagonalisation

Si u admet n vp deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable.

Preuve :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de u .

π_u est un polynôme de degré n , dont les racines sont les vp de u .

u ayant n vp, alors $\pi_u = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$. Par suite, π_u est scindé, et les vp de u sont des vp simples.

Par suite pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\dim E_{\lambda_i}(u) = 1$ qui n'est autre que l'ordre de multiplicité de λ_i .

D'où, u est diagonalisable.

★ Remarques :

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$.

$$\dim E_{\lambda}(u) = \dim \text{Ker}(u - \lambda e) = \dim E - \text{rg}(u - \lambda e).$$

$$\text{Pour } A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ et } \lambda \in Sp(A), \dim SEP(A, \lambda) = \dim \text{Ker}(A - \lambda I) = n - \text{rg}(A - \lambda I).$$

Ainsi, dans la pratique, il suffit de calculer le rang pour avoir la dimension du sous-espace propre.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est diagonalisable, diagonaliser A revient à déterminer une matrice $D \in D_n(\mathbb{K})$ et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$.
 - Les éléments diagonaux de D sont les vp de A .
 - $P = P_{B_0 B}$, où B_0 est la base canonique de \mathbb{K}^n et B la base formée des \vec{v}_p de A . En effet, soit u l'unique endomorphisme de \mathbb{K}^n tel que $A = M(u; B_0)$. Par suite, $D = M(u; B)$. Ainsi $D = P_{B B_0} A P_{B_0 B} = P^{-1} A P$, avec $P = P_{B_0 B}$.

2.4 Trigonalisation

E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Définitions 17 :

1. $u \in \mathcal{L}(E)$ est dite trigonalisable s'il existe une base B de E telle que $M(u; B)$ soit triangulaire supérieure.
2. $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

★ Remarque :

Si $A = M(u; B)$, alors

u est trigonalisable si, et seulement si, A est trigonalisable

Théorème 18 :

Condition nécessaire et suffisante de trigonalisation

A (resp. u) est trigonalisable si et seulement si π_A (resp. π_u) est scindé.

Preuve :

- Supposons que u est trigonalisable.

Si u est trigonalisable, alors il existe une base B de E telle que

$$A = M(u; B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\pi_u(X) = \pi_A(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 - X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n - X \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$$

Par suite, π_u est scindé.

• Supposons que A est trigonalisable.

On démontre par récurrence sur $n = \dim E$.

Soit $P(n)$ la propriété :

“Pour tout \mathbb{K} -ev de dimension $n \geq 1$, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que π_u est scindé, alors u est trigonalisable.”

– $P(1)$ est vraie car si $\dim E = 1$ et si (e) est une base de E , alors $M(u; (e)) = (\lambda)$ est une matrice triangulaire supérieure.

– Supposons la propriété vraie pour $n - 1$ (H.R.) et démontrons qu'elle est vraie pour n .

– Soit un E un \mathbb{K} -ev de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que π_u soit scindé.

π_u étant scindé, alors π_u admet au moins une racine, et par suite u admet au moins une vp.

Soit donc λ une vp de u et e_1 un \vec{v}_p de u associé à λ . e_1 étant non nul, (e_1) est libre, et peut donc être complétée en une base $B = (e_1, u_2, \dots, u_n)$ de E .

Soit $F = \text{Vect}(u_2, \dots, u_n)$. Donc $\dim F = n - 1$ et $E = \mathbb{K}e_1 \oplus F$, où $\mathbb{K}e_1 = \text{Vect}(e_1)$.

On considère les applications suivantes :

$$g = u|_F : F \longrightarrow E \quad \text{et} \quad p : E = \mathbb{K}e_1 \oplus F \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto g(x) = u(x) \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2 \longmapsto x_2$$

p est la projection sur F parallèlement à $\mathbb{K}e_1$. Donc :

Si $x \in F$, $p(x) = x$, et si $x \in \mathbb{K}e_1$, $p(x) = 0$.

Soit $h = p \circ g \in \mathcal{L}(F)$.

On note $A = M(u; B) = (a_{ij})$.

Pour tout $j \geq 2$, on a :

$$u(u_j) = a_{1j}e_1 + \sum_{i=2}^n a_{ij}u_i$$

et donc

$$h(u_j) = p(u(u_j)) = p\left(\sum_{i=1}^n a_{1j}e_1 + \sum_{i=2}^n a_{ij}u_i\right) = \sum_{i=2}^n a_{ij}u_i$$

$$\text{Par suite } A = M(u; B) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

où $L \in M_{1, n-1}(\mathbb{K})$ et $M \in M_{n-1}(\mathbb{K})$, avec $M = M(h; (u_2, \dots, u_n))$.

Ainsi, $\pi_u(X) = (\lambda - X)\det(M - XI_{n-1}) = (\lambda - X)\pi_M(X) = (\lambda - X)\pi_h(X)$.

π_u étant scindé, il en est de même pour π_h . De plus $h \in \mathcal{L}(F)$ et $\dim F = n - 1$. D'après l'H.R. h est trigonalisable. Par suite, il existe une base (v_2, \dots, v_n) de F telle que $T = M(h; (v_2, \dots, v_n))$ soit triangulaire supérieure.

Comme $E = \mathbb{K}e_1 \oplus F$, $B' = (e_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de E , et on a

$$M(u; B') = \begin{pmatrix} \lambda & L' \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

$M(u; B')$ étant triangulaire supérieure, alors u est trigonalisable.

★ Remarques :

1. Toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ et tout endomorphisme u d'un \mathbb{C} -ev sont trigonalisables car dans \mathbb{C} , tout polynôme est scindé.

2. La démonstration du théorème précédent donne une méthode pratique pour la trigonalisation des matrices et des endomorphismes.

Soit par exemple un endomorphisme trigonalisable u d'un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 1$.

On commence par trouver les vp et les \vec{v}_p de u .

Soit $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, on note $N_i = SEP(u, \lambda_i)$ et B_i une base de N_i .

Soit $F = \bigoplus_{i=1}^p N_i$ et $B = \bigcup_{i=1}^p B_i = (e_1, \dots, e_m)$. B est une base de F . On la complète en une base $B_1 = (e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ de E .

$M(u; B_1) = \begin{pmatrix} D & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$ où $D \in D_m(\mathbb{K})$ (la diagonale étant formée des vp car pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, e_i est un \vec{v}_p), $L \in M_{m, n-m}(\mathbb{K})$, et $M \in M_{n-m}(\mathbb{K})$.

Pour trigonaliser u il suffit de trigonaliser M .

Chapitre 3

Réduction des endomorphismes et des matrices- niveau 2

Dans tout ce chapitre, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

3.1 Stabilité d'un sev par un endomorphisme

Définition 1 :

Soit F un sev de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

◇ Exemples :

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, un SEP de u est stable par u .

En effet :

Soit λ une vp de u , et $x \in SEP(u, \lambda)$. Montrons que $y = u(x) \in SEP(u, \lambda)$.

$u(y) = u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda y$. Donc $y = u(x) \in SEP(u, \lambda)$.

2. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $Ker u$ et $Im u$ sont stables par u .

En effet :

· Soit $x \in Ker u$, donc $u(x) = 0$, et $u(u(x)) = 0$ (u linéaire).

Par suite $u(x) \in Ker u$, et $Ker u$ est stable par u .

· Si $x \in Im u$, alors $u(x) \in Im u$, par définition de $Im u$. Ainsi, $Im u$ est stable par u .

3. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \circ v = v \circ u$, alors $Ker u$ et $Im u$ sont stables par v (de même $Ker v$ et $Im v$ sont stables par u).

En effet :

· Soit $y \in Im u$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$.

Ainsi,

$$v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) \in Im u$$

D'où $Im u$ est stable par v .

· Pour tout $x \in Ker u$, $u(x) = 0_E$

Par suite,

$$v \circ u(x) = 0 \implies u \circ v(x) = 0 \implies u(v(x)) = 0 \implies v(x) \in \text{Ker } u$$

D'où $\text{Ker } u$ est stable par v .

Caractérisation d'un sev stable :

Proposition 2 :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E .

F est stable par u , si, et seulement si, il existe une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que (e_1, \dots, e_p) soit une base de F où $p = \dim F$, et

$$M(u; B) = \left(\begin{array}{c|c} A & M \\ \hline 0_{n-p,p} & N \end{array} \right)$$

où $A \in M_p(\mathbb{K})$, $M \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $N \in M_{n-p}(\mathbb{K})$.

Preuve :

· Supposons que F est stable par u .

F est un sev de E et $\dim F = p$, donc il existe une base (e_1, \dots, e_p) de F . On peut la compléter en une base $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E .

De plus, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $u(e_i) \in F$ car F est stable. Donc $u(e_i)$ s'écrit en fonction de e_1, \dots, e_p .

· La réciproque est évidente.

★ Remarques :

1. Comme F est stable par u , on peut définir l'endomorphisme de F suivant :

$$\begin{array}{ccc} v : f & \longrightarrow & F \\ & & x \longmapsto u(x) \end{array}$$

De plus, la matrice A donnée par le théorème vérifie $A = M(v, (e_1, \dots, e_p))$.

2. Π_v divise Π_u . En effet :

$$\begin{aligned} \Pi_u(X) = \Pi_{M(u;B)}(X) &= \left| \begin{array}{c|c} A - XI_p & M \\ \hline 0 & N - XI_{n-p} \end{array} \right| \\ &= \det(A - XI_p) \det(N - XI_{n-p}) = \Pi_A(X) \Pi_N(X) \\ &= \Pi_v(X) \Pi_N(X) \end{aligned}$$

$\Pi_N(X)$ étant un polynôme, alors Π_v divise Π_u .

3.2 Polynômes d'un endomorphisme et d'une matrice

Définitions 3 :

Soient $P = \sum_{k=0}^r a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(K)$.

1. On appelle polynôme de u , l'endomorphisme de E donné et défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^r a_k u^k$$

2. On appelle polynôme de A , la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ donnée et définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^r a_k A^k$$

◇ Exemples :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(K)$.

1. Si $P = 2$, alors $P(u) = 2e$ et $P(A) = 2I$.
2. Si $P = 3X - 1$, alors $P(u) = 3u - e$ et $P(A) = 3A - I$.

Propriétés 4 :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(K)$.

1. $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$, $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$
2. $(\lambda P)(u) = \lambda P(u)$, $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$
3. $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$,
 $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = (QP)(A) = Q(A)P(A)$

★ Remarque :

Dans 3, si $Q = X$, alors $Q(u) = u$ et $P(u) \circ u = u \circ P(u)$.

Donc $Im P(u)$ et $Ker P(u)$ sont stables par u .

Propriété 5 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E . Alors,

$$M(u^k; B) = (M(u; B))^k$$

* Conséquence :

Si B est une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = M(u; B)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$P(A) = P(M(u; B)) = M(P(u); B)$$

Polynômes annulateurs

Définition 6 :

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de u (resp. de A) si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. (resp. $P(A) = 0$)

★ Remarque :

Toutes les propriétés valables pour les polynôme d'endomorphismes sont valables pour les polynômes de matrices et réciproquement.

◇ Exemples :

1. Le polynôme nul est annulateur de tout endomorphisme.
2. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u^2 - u + e = 0_{\mathcal{L}(E)}$, le polynôme $P = X^2 - X + 1$ est un annulateur de u .

Proposition 7 :

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique polynôme unitaire P_0 tel que $P_0(u) = 0$ et qui vérifie

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], (P(u) = 0 \implies (P_0 \text{ divise } P))$$

Preuve :

Soit $I = \{A \in \mathbb{K}[X] ; A(u) = 0\}$.

I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En effet,

· Pour tous $P, Q \in I$,

$$(P + Q)(u) = P(u) + Q(u) = 0$$

Donc $P + Q \in I$.

· Pour tous $P \in \mathbb{K}[X], Q \in I$,

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = 0$$

Donc $PQ \in I$.

Or $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal, donc tous ces idéaux sont engendrés par un seul élément de $\mathbb{K}[X]$ *i.e.* il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I = P\mathbb{K}[X] = \{\text{multiples de } P\} = \{PQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

De plus, si P_1 engendre I et P_2 engendre I , alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tel que $P_1 = \alpha P_2$.

Donc il existe un unique élément de $\mathbb{K}[X]$ unitaire P_0 , tel que $I = P_0\mathbb{K}[X] = \{\text{multiples de } P_0\}$, ce qui démontre le résultat.

Définition 8 :

Le polynôme ainsi trouvé s'appelle le polynôme minimal de u . On le note M_u ou μ_u : $M_u(u) = 0$ et si $P(u) = 0$ alors M_u divise P .

Théorème 9 :

Théorème de Cayley - Hamilton

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$), alors $\Pi_u(u) = 0$ (resp. $\Pi_A(A) = 0$).

Preuve :

On fera la démonstration dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors Π_u est scindé et u est trigonalisable.

Il existe donc une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que ;

$$A = M(u; B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de u .

Posons pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ et $F_0 = \{O_E\}$. Donc $F_n = E$.

Idée de la démonstration :

On veut démontrer que $\Pi_u(u) = 0$.

Or

$$\Pi_u(X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

On pose pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P_i(X) = X - \lambda_i$, et $f_i = P_i(u) = u - \lambda_i e$, alors

$$\Pi_u(u) = (-1)^n f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$$

Il faut donc démontrer que

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

i.e. pour tout $x \in E$,

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n(x) = 0_E$$

En d'autres termes il faut démontrer que

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n(E) = O_E$$

Or $E = F_n$ et $\{0\} = F_0$.

Il faut donc démontrer que

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n(F_n) \subset F_0$$

Ainsi, si on démontre que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $f_i(F_i) \subset F_{i-1}$, on aura

$$f_{i-1}(f_i(F_i)) \subset f_{i-1}(F_{i-1}) \subset F_{i-2}, f_{i-2}(f_{i-1}(f_i(F_i))) \subset f_{i-2}(F_{i-2}) \subset F_{i-3}, \dots$$

On a alors

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_i(F_i) \subset F_0$$

Pour $i = n$, on obtient l'inclusion voulue.

Reste donc à démontrer que pour $i \in \mathbb{N}_n$, $f_i(F_i) \subset F_{i-1}$.

Pour celà, on démontre que pour $i \in \mathbb{N}_n$, $f_i(F_i) \subset F_{i-1}$, donc que F_{i-1} est stable par f_i et $f_i(e_i) \in F_{i-1}$

- Montrons que pour tous $i, j \in \mathbb{N}_n$, F_i est stable par $f_j = u - \lambda_j e$.
 e étant l'identité F_i est stable par $\lambda_j e$.

De plus, F_i est stable par u . En effet, pour tout $x \in F_i$,

$$x = \sum_{k=1}^i \alpha_{ki} e_k, \text{ et } u(x) = \sum_{k=1}^i \alpha_{ki} u(e_k)$$

Or pour $k \in \mathbb{N}_i$,

$$u(e_k) = t_{1k} e_1 + t_{2k} e_2 + \dots + t_{k-1,k} e_{k-1} + \lambda_j e_k \in F_i$$

Donc $u(x) \in F_i$. Ainsi, $u(F_i) \subset F_i$, et F_i est stable par u .

Par suite, F_i est stable par f_j . En particulier, F_{i-1} est stable par f_i .

- On a

$$u(e_i) = \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} e_k + \lambda_i e_i$$

Donc

$$(u - \lambda_i e)(e_i) = \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} e_k \in F_{i-1}$$

On a ainsi démontré que $f_i(F_i) \subset F_{i-1}$.

Le raisonnement précédent, montre que

$$\Pi_u(u) = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

et Π_u est donc un polynôme annulateur de u .

* Conséquence :

M_u divise Π_u d'après la définition du polynôme minimal et du théorème de Cayley-Hamilton.

★ Remarque :

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, et $\Pi_A(X) = X^3 - X^2 + 2$, alors $\Pi_A(A) = A^3 - A^2 + 2I = 0$.

Donc $A(A - A^2) = 2I$. A est donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(-A^2 + A) = \frac{1}{2}A(-A + I)$.

◇ Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver M_A .

$$\Pi_A(X) = -(X-2)^2(X-1).$$

Comme $M_A(A) = 0$ et $M_A | \Pi_A$. Alors :

$M_A = X-2$, ou $M_A = X+1$, ou $M_A = (X-2)^2$, ou $M_A = (X+1)(X-2)$ ou $M_A = -\Pi_A$.

Or $A-2I \neq 0$, et $A+I \neq 0$.

Comme $(A+I)(A-2I) = 0$, alors $M_A = (X+1)(X-2)$, car il est de degré minimal et $M_A(A) = 0$.

Proposition 10 :

Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont des racines de tout polynôme annulateur de u .

Preuve :

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$, et λ une vp de u .

Il existe alors $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u^k(x) = \lambda^k x$$

De plus,

$$P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k = 0$$

En particulier,

$$0 = P(u)(x) = \sum_{k=0}^n a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k x = \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) x$$

Comme $x \neq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0$$

Ainsi,

$$P(\lambda) = 0$$

et λ est racine de P .

* Conséquence :

Les vp de u sont les racines de M_u .

En effet, si λ est une vp de u , alors λ est une racine de M_u d'après la proposition précédente.

Réciproquement, soit λ une racine de M_u . Comme M_u divise Π_u , donc λ est une racine de Π_u , et donc c'est une valeur propre.

Théorème 11 :

Théorème de décomposition des noyaux - cas simple

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\text{Ker} [(PQ)(u)] = \text{Ker} [P(u)] \oplus \text{Ker} [Q(u)]$$

Preuve :

$P \wedge Q = 1$, donc il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AP + BQ = 1 \tag{3.1}$$

· Démontrons que la somme directe :

Soit $x \in \text{Ker}[P(u)] \cap \text{Ker}[Q(u)]$.

On a

$$(P(u))(x) = 0 = (Q(u))(x)$$

Mais d'après (3.1)

$$AP(u) + BQ(u) = e \implies AP(u)(x) + BQ(u)(x) = x$$

Mais comme $(P(u))(x) = 0$ alors

$$AP(u)(x) = 0$$

De même, comme $(Q(u))(x) = 0$ alors

$$BQ(u)(x) = 0$$

Donc $x = 0$, $\text{Ker}[P(u)] \cap \text{Ker}[Q(u)] = 0$ et la somme est directe.

· Démontrons que

$$\text{Ker}[P(u)] + \text{Ker}[Q(u)] \subset \text{Ker}[PQ(u)]$$

Pour cela, commençons par démontrer que $\text{Ker}[P(u)] \subset \text{Ker}[PQ(u)]$:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}[P(u)] &\implies (P(u))(x) = 0 \\ &\implies (Q(u))(P(u)(x)) = 0 \\ &\implies (QP(u))(x) = 0 \\ &\implies x \in \text{Ker}[PQ(u)] \end{aligned}$$

De même

$$\text{Ker}[Q(u)] \subset \text{Ker}[PQ(u)]$$

Par conséquent,

$$\text{Ker}[P(u)] + \text{Ker}[Q(u)] \subset \text{Ker}[PQ(u)]$$

· Démontrons que $\text{Ker}[PQ(u)] \subset \text{Ker}[P(u)] + \text{Ker}[Q(u)]$:

Soit $x \in \text{Ker}[PQ(u)]$. Par suite

$$P(u) \circ Q(u)(x) = 0$$

D'après (3.1),

$$x = (PA(u))(x) + (QB(u))(x) = P(u) \circ A(u)(x) + Q(u) \circ B(u)(x)$$

D'où,

$$(PQ(u))(x) = 0 \implies (PQA(u))(x) = 0 \implies Q(u)[PA(u)(x)] = 0$$

Donc

$$x_1 = PA(u)(x) \in \text{Ker}[Q(u)]$$

De même

$$[BPQ(u)](x) = 0 = P(u)[QB(u)(x)]$$

donc

$$x_2 = QB(u)(x) \in \text{Ker}[P(u)]$$

Ainsi,

$$x = x_1 + x_2 \in \text{Ker}[Q(u)] + \text{Ker}[P(u)]$$

et

$$\text{Ker}[PQ(u)] \subset \text{Ker}[P(u)] + \text{Ker}[Q(u)]$$

Cas particulier :

Si PQ est un polynôme annulateur de u , on a

$$E = \text{Ker}[PQ(u)]$$

Donc

$$E = \text{Ker}[P(u)] \oplus \text{Ker}[Q(u)]$$

Théorème 12 :

Théorème de décomposition des noyaux - cas général :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et P_1, \dots, P_n des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors :

$$\text{Ker} \left[\prod_{i=1}^n P_i(u) \right] = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker} [P_i(u)]$$

Cas particulier :

Si $\left(\prod_{i=1}^n P_i \right) (u) = 0$ (i.e. $\prod_{i=1}^n P_i$ est un polynôme annulateur de u), on a

$$E = \text{Ker} \left[\left(\prod_{i=1}^n P_i \right) (u) \right]$$

Donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker} [P_i(u)]$$

3.3 Sous-espaces caractéristiques

Définition 13 :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une vp de u (resp. de A) d'ordre de multiplicité m (dans Π_u , resp. π_A). On appelle sous-espace caractéristique de u (resp. de π_A) associé à λ , le noyau de $(u - \lambda e)^m$ (resp. $(A - \lambda I)^m$). On le note $SEC(u, \lambda)$ ou $F_\lambda(u)$ (resp. $SEC(A, \lambda)$) :

$$SEC(u, \lambda) = Ker(u - \lambda e)^m$$

★ Remarque :

Toutes les propriétés concernant les SEC associés à des endomorphismes sont valables pour ceux associés à des matrices et réciproquement.

Propriétés 14 :

Propriétés des SEC

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une vp de u d'ordre de multiplicité m (dans Π_u).

1. $SEP(u, \lambda) \subset SEC(u, \lambda)$.
2. Pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $F_\lambda(u) = SEC(u, \lambda)$ est stable par u .
3. $SEP(u, \lambda) = SEC(u, \lambda)$ si, et seulement si, λ est une racine simple de M_u .

Preuve :

1. Démontrons que $SEP(u, \lambda) \subset SEC(u, \lambda)$.

$$\begin{aligned} x \in SEP(u, \lambda) &\implies (u - \lambda e)(x) = 0 \\ &\implies (u - \lambda e)^{m-1}(u - \lambda e)(x) = 0 \\ &\implies (u - \lambda e)^m(x) = 0 \\ &\implies x \in SEC(u, \lambda) \end{aligned}$$

2. Soit $x \in SEC(u, \lambda) = Ker(u - \lambda e)^m$. Démontrons que $u(x) \in SEC(u, \lambda)$:

$$(u - \lambda e)^m(u(x)) = (u - \lambda e)^m \circ u(x) = u \circ (u - \lambda e)^m(x) = u(0) = 0$$

D'où $u(x) \in SEC(u, \lambda)$.

3. Notons $m \geq 1$ l'ordre de multiplicité de λ .

· Supposons que $SEP(u, \lambda) = SEC(u, \lambda)$. Par suite, on a :

$$Ker(u - \lambda e) = Ker(u - \lambda e)^m$$

Or comme pour tout $p \in \mathbb{N}_n$, on a

$$Ker(u - \lambda e) \subset Ker(u - \lambda e)^p \subset Ker(u - \lambda e)^m$$

On a

$$Ker(u - \lambda e) = Ker(u - \lambda e)^p = Ker(u - \lambda e)^m$$

Soit k l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de M_u . On peut écrire :

$$M_u = (X - \lambda)^k P$$

où $(X - \lambda)^k$ et P sont premiers entre eux. M_u étant un polynôme annulateur de u , on a d'après le théorème de décomposition des noyaux

$$E = \text{Ker}(u - \lambda e)^k \oplus \text{Ker}[P(u)]$$

Comme M_u divise π_u et comme les racines de M_u sont les valeurs propres, alors

$$1 \leq k \leq m$$

Par suite,

$$\text{Ker}(u - \lambda e)^k = \text{Ker}(u - \lambda e)$$

D'où

$$E = \text{Ker}(u - \lambda e) \oplus \text{Ker}[P(u)]$$

Notons $Q = (X - \lambda)P$. Q divise M_u . De plus, comme P est de la forme,

$$P = \prod_{\substack{\mu \in \text{Sp}(u) \\ \mu \neq \lambda}} (X - \mu)^{m_\mu}$$

alors $X - \lambda$ et P sont premiers entre eux. D'où, d'après le théorème de décomposition des noyaux :

$$\text{Ker}[Q(u)] = \text{Ker}(u - \lambda e) \oplus \text{Ker}[P(u)] = E$$

D'où $Q(u) = 0$ et Q est un polynôme annulateur de u . D'où M_u divise Q . M_u et Q étant unitaires, on a

$$M_u = Q$$

λ est donc une racine simple de M_u .

· Réciproquement, supposons que λ est une racine simple de M_u . Donc

$$M_u = (X - \lambda)P$$

où P est de la forme,

$$P = \prod_{\substack{\mu \in \text{Sp}(u) \\ \mu \neq \lambda}} (X - \mu)^{m_\mu}$$

$X - \lambda$ et P sont premiers entre eux, par suite

$$\begin{aligned} E &= \text{Ker}(u - \lambda e) \oplus \text{Ker}[P(u)] \\ &= \text{SEP}(u, \lambda) \oplus \text{Ker}[P(u)] \end{aligned}$$

Notons $R = (X - \lambda)^m P$. On a $R = M_u(X - \lambda)^{m-1}$. Par suite R est un polynôme annulateur de u .

D'autre part $(X - \lambda)^m$ et P sont premiers entre eux. Donc, d'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\begin{aligned} E &= \text{Ker}(u - \lambda e)^m \oplus \text{Ker}[P(u)] \\ &= \text{SEC}(u, \lambda) \oplus \text{Ker}[P(u)] \end{aligned}$$

Par suite,

$$\text{SEP}(u, \lambda) = \text{SEC}(u, \lambda)$$

Proposition 15 :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, m_i l'ordre de multiplicité de λ_i . Si Π_u est scindé, alors :

1. $E = \bigoplus_{i=1}^r SEC(u, \lambda_i)$
2. $\forall i \in \mathbb{N}_r, \dim(SEC(u, \lambda_i)) = m_i$

Preuve :

Notons pour tout $i \in \mathbb{N}_r$ $F_i = SEC(u, \lambda_i) = Ker(u - \lambda_i e)^{m_i}$, $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ et

$$\begin{aligned} v_i : F_i &\longrightarrow F_i \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

1. Comme les λ_i sont 2 à 2 distinctes, les P_i sont 2 à 2 premiers entre eux. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$Ker \left(\prod_{i=1}^r P_i(u) \right) = \bigoplus_{i=1}^r Ker P_i(u)$$

Or

$$\prod_{i=1}^r P_i = (-1)^n \prod_{i=1}^r (\lambda_i - X)^{m_i} = (-1)^n \Pi_u$$

Comme $\Pi_u(u) = 0$, alors $\prod_{i=1}^r P_i(u) = 0$ et $Ker(\prod_{i=1}^r P_i(u)) = E$ donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^r Ker P_i(u) = \bigoplus_{i=1}^r F_i$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}_r$.

$P_i(v_i) = 0$. En effet, soit $x \in F_i$. En notant

$$\begin{aligned} e_i : F_i &\longrightarrow F_i \\ x &\longmapsto e(x) = x \end{aligned}$$

on a

$$(u - \lambda_i e)^m(x) = 0 \implies (v_i - \lambda_i e_i)^m(x) = 0 \implies P_i(v_i)(x) = 0$$

Donc $P_i(v_i) = 0$

P_i est donc un polynôme annulateur de v_i . Par suite, M_{v_i} divise P_i .

λ_i est donc la seule racine de M_{v_i} et par suite, λ_i est la seule vp de v_i .

Ainsi, Π_{v_i} admet λ_i comme racine unique. D'où,

$$\Pi_{v_i} = (\lambda_i - X)^{n_i}$$

où $n_i = \dim F_i$.

D'autre part, F_i est stable par u , donc $v_i \in \mathcal{L}(F_i)$ et Π_{v_i} divise Π_u (déjà démontré).

Ainsi,

$$\deg (\Pi_{v_i}) \leq m_i \implies \dim F_i \leq m_i \implies n_i \leq m_i$$

Or d'après (1),

$$E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$$

d'où

$$n = \dim E = \sum_{i=1}^r n_i$$

Donc

$$\sum_{i=1}^r m_i = \sum_{i=1}^r n_i$$

or

$$n_i \leq m_i$$

d'où, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $n_i = m_i$, et $\dim F_i = m_i$.

* Conséquence :

Si Π_u scindé, u est trigonalisable et $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation :

Proposition 16 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est diagonalisable si, et seulement si, M_u est scindé et n'admet que des racines simples.

Preuve :

- Supposons que u est diagonalisable et démontrons que M_u est scindé et n'admet que des racines simples.

u est diagonalisable, donc

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \text{ et } \dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$$

De plus, u étant diagonalisable Π_u est scindé. Par suite, d'après la proposition précédente,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} F_\lambda(u)$$

et

$$\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim F_\lambda(u)$$

D'où,

$$\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim F_\lambda(u)$$

avec pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $\dim E_\lambda(u) \leq \dim F_\lambda(u)$ ($E_\lambda(u) \subset F_\lambda(u)$).

Soit donc $\lambda \in Sp(u)$. On a, $\dim E_\lambda(u) = \dim F_\lambda(u)$, et $E_\lambda(u) = F_\lambda(u)$. Par suite, λ est une racine simple de M_u .

De plus, comme Π_u est scindé, et M_u divise π_u , alors M_u est scindé.

• Réciproquement, si M_u est scindé et n'admet que des racines simples, alors π_u est scindé (mêmes racines) et

$$\forall \lambda \in Sp(u), E_\lambda(u) = F_\lambda(u)$$

π_u étant scindé,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} F_\lambda(u)$$

Ainsi,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$$

et u est diagonalisable.

Trigonalisation en utilisant les SEC :

Proposition 17 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que Π_u soit scindé. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs et triangulaire supérieure.

$$A = M(u; B) = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{rr} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, A_{ii} est une matrice triangulaire supérieure.

Preuve :

Soit $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, où les λ_i sont deux à deux distinctes, et pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $F_i = F_{\lambda_i}(u)$.

Π_u est scindé, donc $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.

Soit $i \in \mathbb{N}_r$. Comme F_i est stable par u , on peut définir l'endomorphisme

$$\begin{aligned} v_i : F_i &\longrightarrow F_i \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

de plus, π_{v_i} divise π_u , donc π_{v_i} est scindé.

Π_{v_i} étant scindé, v_i est trigonalisable, et il existe donc une base B_i de F_i telle que $A_{ii} = M(v_i; B_i)$ soit triangulaire supérieure.

Soit $B = \bigcup_{i=1}^r B_i$. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$, alors B est une base de E et la matrice de u dans B est donnée par :

$$A = M(u; B) = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{rr} \end{pmatrix}$$

Corollaire 18 :

Toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice diagonale par bloc et triangulaire supérieure.

Pratique de la trigonalisation en utilisant les SEC :

- On cherche Π_A et on vérifie qu'il est scindé
- On détermine les SEC ($E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} F_\lambda(u)$)
- On cherche une base B_λ de chaque $F_\lambda(u)$:
On pose $\dim(F_\lambda(u)) = m_\lambda$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}_{m_\lambda}$, $N_k = Ker(u - \lambda e)^k$. On a $N_{m_\lambda} = Ker(u - \lambda)^{m_\lambda} = F_\lambda(u)$. On considère les noyaux itérés

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_{m_\lambda}$$

On choisit un vecteur $a_{m_\lambda} \in F_\lambda(u) = N_{m_\lambda}$, tel que

$$a_{m_\lambda} \notin N_{m_\lambda-1}$$

Puis on choisit $a_{m_\lambda-1}$ tel que :

$$a_{m_\lambda-1} = (u - \lambda e)(a_{m_\lambda})$$

On a que $a_{m_\lambda-1} \in N_{m_\lambda-1}$ mais $a_{m_\lambda-1} \notin N_{m_\lambda-2}$.

Puis

$$a_{m_\lambda-2} = (u - \lambda e)(a_{m_\lambda-1})$$

On a que $a_{m_\lambda-2} \in N_{m_\lambda-2}$ mais $a_{m_\lambda-2} \notin N_{m_\lambda-3}$.

- $M(u; B)$ où $B = \bigcup_{i=1}^r B_i$ est la matrice demandée

◇ **Exemple :**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans B_0 la base canonique de \mathbb{R}^3 est donnée par :

$$A = M(u, B_0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Vérifier que A est trigonalisable et effectuer sa trigonalisation.

3.4 Applications de la réduction d'une matrice

1. Calcul d'une puissance d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$:
 - Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in D_n(\mathbb{K})$, tels que $A = P^{-1}DP$. Dans ce cas,

$$A^k = P^{-1}D^kP$$

- Si A est trigonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in T_n^s(\mathbb{K})$, tels que $A = P^{-1}TP$.
On écrit T sous la forme $T = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente *i.e.* il existe $r > 0$ tel que $N^r = 0$.

★ Remarque :

D et N ne commutent pas nécessairement, donc on ne peut pas appliquer la formule du binôme de Newton.

$$A = P(D + N)P^{-1} = P^{-1}DP + P^{-1}NP$$

On pose $D_1 = P^{-1}DP$ et $N_1 = P^{-1}NP$

D_1 est diagonalisable et N_1 est nilpotente. Elles vérifient de plus que $D_1N_1 = N_1D_1$. On peut appliquer la formule du binôme :

$$A^k = (D_1 + N_1)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i D_1^{k-i} N_1^i = \sum_{i=0}^{r-1} C_k^i D_1^{k-i} N_1^i$$

(car pour $k \geq r$, $N^k = 0$)

La décomposition

$$A = D_1 + N_1$$

s'appelle la décomposition de Dunford.

2. Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants.

$$\begin{cases} a_{11}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + \dots + a_{1n}f_n(t) + h_1(t) = f_1'(t) \\ a_{21}f_1(t) + a_{22}f_2(t) + \dots + a_{2n}f_n(t) + h_2(t) = f_2'(t) \\ \vdots \\ a_{n1}f_1(t) + a_{n2}f_2(t) + \dots + a_{nn}f_n(t) + h_n(t) = f_n'(t) \end{cases}$$

où pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_m^2$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, et pour $i \in \mathbb{N}_m$, h_i est une fonction donnée et f_i un fonction à déterminer.

Méthode :

On pose

$$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}), F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}$$

Le système devient alors

$$\frac{dF}{dt} = AF + B$$

(a) On réduit la matrice A : $A = P^{-1}A'P$ (A' diagonale ou triangulaire)

(b) On pose

$$\begin{cases} F = P^{-1}G \text{ i.e. } G = PF \\ B = P^{-1}C \text{ i.e. } C = PB \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{dF}{dt} = P^{-1} \frac{dG}{dt}$$

(P est une matrice constante)

Après remplacement et simplification par P^{-1} , le système devient :

$$\frac{dG}{dt} = A'G + C$$

(c) On note

$$G = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$$

· Si $A' = (a'_{ij})$ est diagonale, le système s'écrit :

$$\begin{cases} a'_{11}g_1(t) + c_1(t) = g'_1(t) \\ a'_{22}g_2(t) + c_2(t) = g'_2(t) \\ \vdots \\ a'_{nn}g_n(t) + c_n(t) = g'_n(t) \end{cases}$$

Ce qui revient à résoudre n équation différentielles découplées.

· Si $A' = (a'_{ij})$ est triangulaire supérieure, le système s'écrit :

$$\begin{cases} a'_{11}g_1(t) + a'_{12}g_2(t) + \dots + a'_{1n}g_n(t) + c_1(t) = g'_1(t) \\ a'_{22}g_2(t) + \dots + a'_{2n}g_n(t) + c_2(t) = g'_2(t) \\ \vdots \\ a'_{n-1,n-1}g_1(t) + a'_{n-1,n}g_n(t) + c_n(t) = g'_n(t) \\ a'_{nn}g_n(t) + c_n(t) = g'_n(t) \end{cases}$$

On résout de bas en haut : on résout la dernière équation, on obtient g_n , puis on remplace dans l'avant-dernière équation et on la résout, on obtient g_{n-1} , etc...

On en déduit F et ses composantes.

Chapitre 4

Dualité

4.1 Espace dual

4.1.1 Introduction et généralités

Définition 1 :

Soit E un K -ev.

1. On appelle forme linéaire toute application linéaire de E dans K .
2. L'ensemble des forme linéaires sur E s'appelle l'espace dual de E et sera noté E^*

$$E^* = \mathcal{L}(E, K)$$

★ *Remarque :*

1. Si $\dim E = n$, alors $\dim E^* = n$
2. Si $u \in E^*$ et $u \neq 0$, alors u est surjective. De plus, si $\dim E = n$, alors $\dim(\text{Ker } u) = n - 1$.
En effet, si $u \neq 0$, il existe $x \in E$, tel que $u(x) \neq 0$. Notons $\lambda = u(x)$.
Soit $y \in \mathbb{K}$. Il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha\lambda$. Par suite, on a

$$y = \alpha\lambda = \alpha u(x) = u(\alpha x)$$

D'où u est surjective, et $\text{Im } u = \mathbb{K}$.

Si $\dim E = n$, on a d'après le théorème du rang

$$\dim(\text{Ker } u) = n - \dim(\text{Im } u) = n - \dim \mathbb{K} = n - 1$$

◇ *Exemples :*

1.

$$\begin{aligned} \text{tr} : M_n(K) &\longrightarrow K \\ A &\longmapsto \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned}$$

$$\text{tr}(0) = 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, A, B \in M_n(\mathbb{K}), \text{tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B).$$

2. $E = C([a, b]; \mathbb{R})$, où $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f, g \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

3. Formes coordonnées : Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Si $x \in E^*$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on pose

$$\begin{aligned} u_i : E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

$$u_i \in E^* \text{ car } u_i(0) = 0, \text{ et pour tous } \lambda \in \mathbb{K}, x, y \in E, u_i(\lambda x + y) = \lambda u_i(x) + u_i(y)$$

Proposition 2 :

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n . Alors (u_1, u_2, \dots, u_n) est une base de E^* , où u_1, \dots, u_n sont les formes coordonnées définies précédemment.

Preuve :

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Supposons que $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0_{E^*}$. Alors :

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x) = 0$$

En particulier, pour $j \in \mathbb{N}_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) (e_j) = 0$$

Or

$$u_i(e_j) = u_i(0e_1 + \dots + 0e_{j-1} + 1.e_j + 0e_{j+1} + \dots + 0e_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ainsi $u(e_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

Donc

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(e_j) = 0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$$

et,

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \alpha_j = 0$$

Par suite (u_1, u_2, \dots, u_n) est une famille libre et $\dim E^* = n$, donc (u_1, u_2, \dots, u_n) est une base de E^* .

Définition 3 :

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $B^* = (u_1, \dots, u_n)$, s'appelle la base duale de B . Elle est caractérisée par

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_n, u_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Notations :

Les éléments de E^* seront notés x^*, y^*, z^*, \dots

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Si $x \in E$, et $y \in E^*$, on note :

$$\langle x, y^* \rangle = y^*(x)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ s'appelle le crochet de dualité.

★ Remarques :

Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale.

1. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ on a $x_i = e_i^*(x)$. Donc,

$$x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i^* \rangle e_i$$

2. Soit $y^* \in E^*$. Par suite $y^* = \sum_{j=1}^n y_j e_j^*$, où pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $y_j = y^*(e_j)$.

En effet, soit $j \in \mathbb{N}_n$,

$$y^*(e_j) = \sum_{i=1}^n (y_i e_i^*)(e_j) = \sum_{i=1}^n y_i \delta_{ij} = y_j$$

Donc

$$y^* = \sum_{i=1}^n \langle e_i, y^* \rangle e_i^* = \sum_{i=1}^n y^*(e_i) e_i^*$$

4.1.2 Changement de base

Dans toute la suite, on considère un \mathbb{K} -ev E de dimension finie $n \geq 1$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale.

Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x_i \in \mathbb{K}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Soit $y \in E^*$, alors $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j^*$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $y_i \in \mathbb{K}$.

On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$y^*(x) = \langle x, y^* \rangle = \left(\sum_{i=1}^n y_j e_j^* \right) (x) = \sum_{i=1}^n y_j (e_j^*(x)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = Y^t \cdot X$$

Proposition 4 :

Soit B et B' deux bases de E , B^* et B'^* les deux bases duales associées.

Si $P = P_{B, B'}$, et $Q = P_{B^*, B'^*}$, alors

$$Q = (P^{-1})^t$$

Preuve :

Si $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$, avec pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x_i, x'_i \in \mathbb{K}$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \text{ avec } X = P X'.$$

Si $y \in E^*$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i^* = \sum_{i=1}^n y'_i e_i'^*$, avec pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $y_i, y'_i \in \mathbb{K}$.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}, \text{ avec } Y = Q Y'.$$

On a

$$y^*(x) = Y^t \cdot X = Y'^t \cdot X'$$

Or,

$$Y^t X = Y'^t \cdot P X'$$

Comme de plus $y^*(x) = Y'^t \cdot X'$, alors, pour tout $X' \in M_{n1}(\mathbb{K})$

$$Y'^t \cdot P X' = Y'^t \cdot X'$$

D'où $Y^t P = Y'^t$, et $P^t Y = Y'$. Par suite

$$Y = (P^{-1})^t Y'$$

D'où

$$Q = (P^{-1})^t$$

◇ Exemple :

$$v_1 = (2, 1, 4), v_2 = (3, 2, 3), v_3 = (-1, -1, 2).$$

Démontrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer B^* .

Solution

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Donc (v_1, v_2, v_3) est une famille libre. Comme de plus, $\text{Card}(v_1, v_2, v_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

Soit $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $B_0^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale.

$$P = P_{B_0 B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P_{B_0^* B^*} = (P^{-1})^t$$

$$\begin{cases} v_1 = 2e_1 + e_2 + 4e_3 \\ v_2 = 3e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ v_3 = -e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 + 2v_3 = -e_2 + 8e_3 \\ v_2 + 3v_3 = -e_2 + 9e_3 \end{cases} \implies e_3 = -v_1 + v_2 + v_3$$

$$e_2 = 8e_3 - v_1 - 2v_3 \implies e_2 = -9v_1 + 8v_2 + 6v_3$$

$$e_1 = -v_3 - e_2 + 2e_3 \implies e_1 = 7v_1 - 6v_2 - 5v_3.$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -9 & -1 \\ -6 & 8 & 1 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } (P^{-1})^t = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ -9 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } v_1^* = 7e_1^* - 9e_2^* - e_3^*, v_2^* = -6e_1^* + 8e_2^* + e_3^*, v_3^* = -5e_1^* + 6e_2^* + e_3^*.$$

4.2 Orthogonalité

Soit E un \mathbb{K} -ev et E^* son espace dual.

Définition 5 :

1. Soient $x \in E, y^* \in E^*$.

On dit que x et y^* sont orthogonaux si, et seulement si, $\langle x, y^* \rangle = 0$.

On dit aussi que x est orthogonal à y^* ou que y^* est orthogonal à x .

2. Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A , l'ensemble $A^\perp = \{y^* \in E^* ; \forall x \in A, \langle x, y^* \rangle = 0\}$.

3. Si $L \subset E^*$, on appelle orthogonal de L , l'ensemble $L^0 = \{x \in E ; \forall y^* \in L, \langle x, y^* \rangle = 0\}$.

★ Remarque :

Si $A = \{a\}$, on note $a^\perp = \{a\}^\perp$.

Si $L = \{y^*\}$, on notera $(u^*)^0 = \{y^*\}^0$.

Lemme

- Si $u \in E^*$ et $u \neq 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$.
- Si $x \in E$ et $x \neq 0$, alors il existe $u \in E^*$ tel que $u(x) \neq 0$.

Preuve :

- Par définition d'une application non identiquement nulle.
- Si $x \neq 0$, on pose $e_1 = x$, et on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E .
Soit (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale. On a

$$e_1^*(x) = e_1^*(e_1) = 1 \neq 0$$

Ainsi, $u = e_1^*$.

Propriétés 6 :

Soient $A, B \subset E$ et $L, L' \subset E^*$.

1. (a) A^\perp est un sev de E^*
(b) L^0 est un sev de E
2. (a) $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
(b) $L \subset L' \implies (L')^0 \subset L^0$
3. (a) $A^\perp = (\text{vect}A)^\perp$
(b) $L^0 = (\text{vect}L)^0$
4. (a) $\{0_E\}^\perp = E^*$
(b) $\{0_{E^*}\}^0 = E$
5. (a) $E^\perp = 0_{E^*}$
(b) $E^{*0} = \{0_E\}$

Preuve :

1. (a) $0^* \in A^\perp$. En effet,

$$\forall x \in A, \langle x, 0^* \rangle = 0$$

Soient $y^*, y'^* \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\forall x \in A, \langle x, \lambda y^* + y'^* \rangle = \lambda \langle x, y^* \rangle + \langle x, y'^* \rangle = 0$$

Donc $\lambda y^* + y'^* \in A^\perp$.

- (b) $0 \in L^0$, en effet,

$$\forall y^* \in L, \langle 0, y^* \rangle = 0$$

Soient $x, x' \in L^0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\forall y^* \in L, \langle \lambda x + x', y^* \rangle = \lambda \langle x, y^* \rangle + \langle x', y^* \rangle = 0$$

Donc $\lambda x + x' \in L^0$.

2. (a) Soit $y^* \in B^\perp$. Pour tout $x \in A$, on a $x \in B$, donc $\langle x, y^* \rangle = 0$, et $y^* \in A^\perp$.

Par suite, $B^\perp \subset A^\perp$.

(b) Soit $x \in L'^0$. Pour tout $y^* \in L$, on a $y^* \in L'$, donc $\langle x, y^* \rangle = 0$, et $x \in L^0$.

Par suite, $L'^0 \subset L^0$.

3. (a) $A \subset \text{Vect} A$, donc $(\text{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$.

Soit $y^* \in A^\perp$.

Pour tout $x \in \text{Vect} A$, $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ où pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in A$.

$$\langle x, y^* \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x_i, y^* \rangle = 0$$

Donc $y^* \in (\text{Vect} A)^\perp$.

Par suite $A^\perp \subset (\text{Vect} A)^\perp$, et $A^\perp = (\text{Vect} A)^\perp$.

(b) $L \subset \text{Vect} L$, donc $(\text{Vect} L)^0 \subset L^0$.

Soit $x \in L^0$.

Pour tout $y^* \in \text{Vect} L$, $y^* = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i^*$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_m$ $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $y_i^* \in L$.

$$\langle x, y^* \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, y_i^* \rangle = 0$$

D'où $x \in (\text{Vect} L)^0$.

Par suite $L^0 \subset (\text{Vect} L)^0$ et $L^0 = (\text{Vect} L)^0$.

4. (a) $\{0_E\}^\perp \subset E^*$ immédiat.

Soit $u \in E^*$, $u(0_E) = 0$, donc $u \in \{0_E\}^\perp$ et $E^* \subset \{0_E\}^\perp$.

En conclusion, $E^* = \{0_E\}^\perp$.

(b) $\{0_{E^*}\} \in E$ immédiat.

Soit $x \in E$, $\langle x, 0_{E^*} \rangle = 0$. Donc $x \in \{0_{E^*}\}^0$ et $E \subset \{0_{E^*}\}^0$.

En conclusion, $E = \{0_{E^*}\}^0$.

5. (a) $\{0_{E^*}\} \subset E^\perp$, car pour tout $x \in E$, $\langle x, 0_{E^*} \rangle = 0$.

Si $u \notin \{0_{E^*}\}$, il existe $x \in E$; $u(x) \neq 0$, donc $u \notin E^\perp$.

Ainsi, $E^\perp \subset \{0_{E^*}\}$ et $\{0_{E^*}\} = E^\perp$.

(b) $\{0_E\} \subset E^{*0}$ car pour tout $u \in E^*$, $\langle 0_E, u \rangle = 0$.

Si $x \neq 0_E$, il existe $u \in E^*$; $u(x) \neq 0$. Donc $x \notin E^{*0}$.

D'où $E^{*0} \subset \{0_E\}$ et $E^{*0} = \{0_E\}$.

Proposition 7 :

Soit V un sev de E . Alors

1. $\dim V^\perp = \dim E - \dim V$.

2. Si $E = V \oplus W$, alors $E^* = V^* \oplus W^*$

Preuve :

1. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de V . On la complète en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E . On considère $(e_1^*, \dots, e_p^*, e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale.

Soit $y^* \in E^*$, alors $y^* = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*$, avec pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $y_i = \langle e_i, y^* \rangle = y^*(e_i)$.

$$y^* \in V^\perp \iff y^* \in \{e_1, \dots, e_p\}^\perp \iff \forall y \in \mathbb{N}_p, y_i = \langle e_i, y^* \rangle = 0 \iff y^* \in \text{Vect}\{e_{p+1}^*, \dots, e_n^*\}$$

D'où $V^\perp = \text{Vect}\{e_{p+1}^*, \dots, e_n^*\}$, et $\dim V^\perp = n - p = \dim E - \dim V$.

2. Si (e_1, \dots, e_p) est une base de V et (e_{p+1}, \dots, e_n) est une base de W , alors $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E et $(e_1^*, \dots, e_p^*, e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E .

D'après 1) $(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ est une base de V^\perp , et (e_1^*, \dots, e_p^*) est une base de W^\perp .

D'où $E^* = V^\perp \oplus W^\perp$.

Corollaire 8 :

Si V est un sev de E , alors $(V^\perp)^\perp = V$.

4.3 Espace bidual

Définition 9 :

Soit E un K -ev.

L'espace dual de E^* est appelé l'espace bidual de E . On le note E^{**} .

$$(E^*)^* = E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$$

Isomorphisme canonique entre E et E^{**}

Proposition 10 :

Soit $x_0 \in E$ fixe.

On définit l'application

$$\begin{aligned} \theta_{x_0} : E^* &\longrightarrow K \\ y^* &\longmapsto \langle x_0, y^* \rangle \end{aligned}$$

Alors θ_{x_0} est linéaire, c.à.d $\theta_{x_0} \in E^{**}$.

Preuve :

$$\theta_{x_0}(0) = 0.$$

Soient $y^*, z^* \in E^*$, $\lambda \in K$.

$$\theta_{x_0}(\lambda y^* + z^*) = \langle x_0, \lambda y^* + z^* \rangle = \lambda \langle x_0, y^* \rangle + \langle x_0, z^* \rangle = \lambda \theta_{x_0}(y^*) + \theta_{x_0}(z^*)$$

D'où θ_{x_0} est linéaire.

Proposition 11 :

Soit

$$\begin{aligned} \theta : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \theta_x \end{aligned}$$

l'application définie par $\theta(x) = \theta_x$. θ est un isomorphisme (linéaire bijective).

Preuve :

Linéarité : $\theta(0) = 0$

Soient $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Démontrons que : $\theta(\lambda x + y) = \lambda \theta(x) + \theta(y)$

$$\forall y^* \in E^*, (\theta(\lambda x + y))(y^*) = y^*(\lambda x + y) = \lambda y^*(x) + y^*(y) = \lambda \theta_x(y^*) + \theta_y(y^*) = (\lambda \theta_x + \theta_y)(y^*)$$

Donc $\theta(\lambda x + y) = \lambda \theta(x) + \theta(y)$ et θ est linéaire.

$$\begin{aligned}
x \in \text{Ker } \theta &\iff \theta(x) = 0_{E^{**}} \\
&\iff \forall y^* \in E^*, (\theta(x))(y^*) = 0 = y^*(x) \\
&\iff x \in (E^*)^0 \\
&\iff x \in \{0_E\}
\end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } \theta = \{0_E\}$ et comme $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$, alors θ est un isomorphisme.

Proposition 12 :

Soit E un K -ev. A chaque base $F = (v_1, \dots, v_n)$ de E^* correspond une base B de E et une seule tel que $B^* = F$.

B s'appelle la base préduale de F .

Preuve :

Soit $F^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$, la base duale de F .

On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $e_i = \theta^{-1}(v_i^*)$.

θ^{-1} est un isomorphisme donc $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . De plus, on a

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_n, \langle e_i, v_j \rangle = \theta(e_i)(v_j) = v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

Donc $F = B^*$.

L'isomorphisme de θ prouve l'unicité de B d'après l'unicité de F^* .

★ *Remarque :*

Soient B une base de E , B^* sa base duale, F une base de E^* et B' sa base préduale. On a donc $B'^* = F$. Or

$$P_{B^*B'^*} = {}^t(P_{BB'}^{-1}) \iff P_{BB'} = {}^t(P_{B^*B'^*}^{-1})$$

D'où

$$P_{BB'} = {}^t(P_{B^*F}^{-1})$$

◇ *Exemple :*

$$E = \mathbb{R}_3[X] = \{p \in \mathbb{R}[X] ; d^o P \leq 3\}$$

$B = (1, X, X^2, X^3)$ base de E .

On considère $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in E^*$ définies pour tout $p \in E$ par :

$$\begin{cases}
\varphi_1(p) = p(0) \\
\varphi_2(p) = p(1) \\
\varphi_3(p) = p''(0) \\
\varphi_4(p) = p''(1)
\end{cases}$$

Vérifier que $F = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^* et trouver la base préduale de F .

Solution

B est une base de E , donc $B^* = (1^*, X^*, X^{2*}, X^{3*})$ est une base de E^* .

Soit $p \in E$.

$$\begin{aligned} p(X) &= aX^3 + bX^2 + cX + d \\ p'(X) &= 3aX^2 + 2bX + c \\ p''(X) &= 6aX + 2b \end{aligned}$$

$\varphi_1(p) = p(0) = d = 1^*(p)$ (car $1^*(X) = 1^*(X^2) = 1^*(X^3) = 0$). Donc $\varphi_1 = 1^*$

$\varphi_2(p) = p(1) = a + b + c + d = X^{3*}(p) + X^{2*}(p) + X^*(p) + 1^*(p) = (1^* + X^* + X^{2*} + X^{3*})(p)$.
Donc $\varphi_2 = 1^* + X^* + X^{2*} + X^{3*}$

$\varphi_3(p) = p''(0) = 2b = 2X^{2*}(p)$. Donc $\varphi_3 = 2X^{2*}$.

$\varphi_4(p) = p''(1) = 6a + 2b = 6X^{3*}(p) + 2X^{2*}(p) = (6X^{3*} + 2X^{2*})(p)$. Donc $\varphi_4 = 6X^{3*} + 2X^{2*}$

$$M = M(\varphi_1, \dots, \varphi_4; B^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = 12 \neq 0$, donc c'est une famille libre, et $\dim(\varphi_1, \dots, \varphi_4) = 4$, donc c'est une base de E^* ,
et $M = P_{B^*, F}$.

Base préduale :

Soit F' la base préduale de F . D'où $F'^* = F$. Donc $P_{BF'} = \left((P_{B^*F})^{-1} \right)^t$.

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} \varphi_1 = 1^* & (1) \\ \varphi_2 = 1^* + X^* + X^{2*} + X^{3*} & (2) \\ \varphi_3 = 2X^{2*} & (3) \\ \varphi_4 = 6X^{3*} + 2X^{2*} & (4) \end{cases}$$

$$(1) \implies 1^* = \varphi_1$$

$$(3) \implies X^{2*} = \frac{1}{2}\varphi_3$$

$$(4) \implies X^{3*} = \frac{1}{6}\varphi_4 - \frac{1}{6}\varphi_3$$

$$(2) \implies X^{4*} = -\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{1}{3}\varphi_3 - \frac{1}{6}\varphi_4$$

$$\text{Donc } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P_{BF'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Donc $F' = (\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4)$ est la base préduale de F , avec :

$$\begin{aligned}\varphi'_1 &= 1 - X \\ \varphi'_2 &= X \\ \varphi'_3 &= -\frac{1}{3}X + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{6}X^3 \\ \varphi'_4 &= -\frac{1}{6}X + \frac{1}{6}X^3\end{aligned}$$

Devoir

$$E = \mathbb{R}_2[X]$$

$$\begin{cases} \varphi_1(p) = p(0) \\ \varphi_2(p) = p(1) \\ \varphi_3(p) = p'(0) \end{cases}$$

Démontrer que $F = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* , et déterminer sa base préduale.

4.4 Hyperplans

$$\dim E = n \geq 2$$

Définition 13 :

Soit F un sev de E .

On appelle codimension de F , l'entier noté et défini par

$$\text{codim } F = \dim E - \dim F$$

F est dit un hyperplan de E si, et seulement si, $\text{codim } F = 1$.

★ Remarque :

H est un hyperplan de E si, et seulement si, H est le supplémentaire d'une droite vectorielle. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\text{codim } H = 1 &\iff \exists x_0 \in E ; H \oplus \mathbb{K}x_0 = E \\ &\iff \exists x_0 \in E ; E^* = H^\perp \oplus (\mathbb{K}x_0)^\perp = H^\perp \oplus x_0^\perp \\ &\iff \exists x_0^* \in E^* ; H^\perp = \mathbb{K}x_0^* \\ &\iff \exists x_0^* \in E^* ; H = \text{Ker } x_0^*\end{aligned}$$

★ Remarque :

Si $H = \text{Ker } u^*$ et $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin H$, alors $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$.

En effet, si $x \in E$, soit $\alpha = \frac{u^*(x)}{u^*(x_0)}$, et $y = x - \alpha x_0$.

$$u^*(y) = u^*(x) - \alpha u^*(x_0) = u^*(x) - u^*(x) = 0$$

Donc $y \in H$, et $x = y + \alpha x_0$.

Proposition 14 :

Soient $u^*, v^* \in E^*$ et $H = \text{Ker } u^* = \text{Ker } v^*$.
Alors il existe $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ tel que $v^* = \lambda u^*$.

Preuve :

Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin H$, donc $u^*(x_0) \neq 0$ et $v^*(x_0) \neq 0$

$$\text{Soit } \lambda = \frac{v^*(x_0)}{u^*(x_0)}$$

et $w^* = v^* - \lambda u^*$.

Si $x \in E$, $x = y + \alpha x_0$ avec $y \in H$

$$w^*(x) = (v^* - \lambda u^*)(y) + \alpha(v^* - \lambda u^*)(x_0) = 0 + \alpha(v^*(x_0) - \frac{v^*(x_0)}{u^*(x_0)}u^*(x_0)) = 0 \text{ (car } y \in H)$$

Donc $w^*(x) = 0 \forall x \in E$. D'où $w^* = 0$, i.e. $v^* = \lambda u^*$.

4.5 Transposition

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si $y^* \in F^*$, alors $y^* \circ u \in E^*$.

Proposition 15 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors

$$\begin{aligned} \tilde{u} : F^* &\longrightarrow E^* \\ y^* &\longmapsto y^* \circ u \end{aligned}$$

est linéaire.

Preuve :

$$\tilde{u}(0) = 0$$

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $y^*, z^* \in F^*$,

$$\tilde{u}(\lambda y^* + z^*) = (\lambda y^* + z^*) \circ u = \lambda y^* \circ u + z^* \circ u = \lambda \tilde{u}(y^*) + \tilde{u}(z^*)$$

Définition 16 :

\tilde{u} sera notée ${}^t u$ et appelée la transposée de u .

Proposition 17 :

L'application

$$\begin{aligned} t : \mathcal{L}(E; F) &\longrightarrow \mathcal{L}(F^*; E^*) \\ u &\longmapsto t(u) = {}^t u \end{aligned}$$

est linéaire.

Cette application s'appelle la transposition.

Si $x \in E$ et $y^* \in F^*$, alors $u(x) \in F$ et

$$\langle u(x), y^* \rangle = \langle x, {}^t u(y^*) \rangle$$

Preuve :

$$t(0) = 0$$

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pour tout $y^* \in F^*$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda u + v)(y^*) &= y^* \circ (\lambda u + v) = \lambda y^* \circ u + y^* \circ v = \lambda {}^t u(y^*) + {}^t v(y^*) \\ &= \lambda t(u)(y^*) + t(v)(y^*) = (\lambda t(u) + t(v))(y^*) \end{aligned}$$

D'où

$$t(\lambda u + v) = \lambda t(u) + t(v)$$

t est donc linéaire.

De plus, si $x \in E$ et $y^* \in F^*$, alors

$$\langle u(x), y^* \rangle = y^*(u(x)) = y^* \circ u(x) = ({}^t u(y^*))(x) = \langle x, {}^t u(y^*) \rangle$$

Proposition 18 :

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev de dimensions respectives n et p , B une base de E et B' une base de F .

On note B^* la base duale de B et B'^* la base duale de B' .

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $M = M(u; B, B')$ et $N = M({}^t u; B'^*, B^*)$, alors

$$N = {}^t M$$

Preuve :

On pose

$$B = (e_1, \dots, e_n), B' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p), B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*), B'^* = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_p^*)$$

et $M = (a_{ij}), N = (b_{ij})$.

Soient $k, j \in \mathbb{N}_n$. On a

$$u(e_k) = \sum_{i=1}^p a_{ik} \varepsilon_i$$

$${}^t u(\varepsilon_j^*) = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*$$

Par suite,

$${}^t u(\varepsilon_j^*)(e_k) = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*(e_k) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \delta_{ik} = b_{kj}$$

et

$${}^t u(\varepsilon_j^*)(e_k) = \varepsilon_j^* \circ u(e_k) = \varepsilon_j^*(u(e_k)) = \varepsilon_j^*\left(\sum_{i=1}^p a_{ik} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^p a_{ik} \varepsilon_j^*(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^p a_{ik} \delta_{ij} = a_{jk}$$

Donc $b_{kj} = a_{jk}$.

* Conséquences :

1. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

$$rg({}^t u) = rg u$$

2. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(G, E)$, alors

$${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$$

Preuve :

Soient B_E, B_F et B_G des bases respectives de E, F et G , et B_E^*, B_F^* et B_G^* leurs bases duales respectives. On pose $M = M(u; B_E, B_F)$ et $N = M(v; B_G, B_E)$.

1. $rg u = rg M = rg {}^t M = rg({}^t u)$.

2. $u \circ v \in \mathcal{L}(G, F)$, donc ${}^t(u \circ v) \in \mathcal{L}(F^*, G^*)$.

${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ et ${}^t v \in \mathcal{L}(E^*, G^*)$, donc ${}^t v \circ {}^t u \in \mathcal{L}(F^*, G^*)$.

De plus,

$$\begin{aligned} M({}^t(u \circ v); B_F^*, B_G^*) &= {}^t(M(u \circ v); B_G, B_E) = {}^t(MN) = {}^t N \cdot {}^t M = M({}^t v; B_E^*, B_G^*) \cdot M({}^t u; B_F^*, B_E^*) \\ &= M({}^t v \circ {}^t u; B_F^*, B_G^*) \end{aligned}$$

D'où

$${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$$

Autre méthode :

Pour tout $y^* \in F^*$, on a :

$${}^t(u \circ v)(y^*) = y^* \circ (u \circ v) = (y^* \circ u) \circ v = {}^t v(y^* \circ u) = {}^t v({}^t u(y^*)) = {}^t v \circ {}^t u(y^*)$$

Donc

$${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$$

★ Remarques :

1. ${}^t(Id_E) = Id_{E^*}$.

En effet, ${}^t(Id_E) \in \mathcal{L}(E^*)$ et $Id_{E^*} \in \mathcal{L}(E^*)$. De plus,

$$\forall y^* \in E^*, {}^t(Id_E)(y^*) = y^* \circ Id_E = y^* = Id_{E^*}(y^*)$$

2. Si f est un isomorphisme de E dans F , alors

$${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$$

En effet, ${}^t(f^{-1}) \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$ et $({}^t f)^{-1} \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$. De plus,

$${}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = {}^t(f^{-1} \circ f) = {}^t Id_E = Id_{E^*}$$

D'où,

$${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$$

Proposition 19 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$(Im\ u)^\perp = Ker\ {}^t u \text{ et } (Ker\ u)^\perp = Im\ {}^t u$$

Preuve :

Soit $y^* \in (Im\ u)^\perp$. Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$\langle u(x), y^* \rangle = 0$$

Démontrons que $y^* \in Ker\ {}^t u$.

$$\forall x \in E, \langle x, {}^t u(y^*) \rangle = \langle u(x), y^* \rangle = 0$$

Par suite, ${}^t u(y^*) = 0$ et $y^* \in Ker\ {}^t u$.

D'où

$$(Im\ u)^\perp \subset Ker\ {}^t u$$

De plus,

$$dim\ Im\ u = rg\ u$$

Donc

$$dim(Im\ u)^\perp = dim\ F - rg\ u = dim\ F - rg\ {}^t u = dim\ Ker\ {}^t u$$

Par suite

$$(Im\ u)^\perp = Ker\ {}^t u$$

On démontre de même que $(Ker\ u)^\perp = Im\ {}^t u$.

★ Remarques :

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sev de E stable par u alors F^\perp est un sev de E^* stable par ${}^t u$.
En effet,
Soit $y^* \in F^\perp$, et démontrons que ${}^t u(y^*) \in F^\perp$.

$$\forall x \in F, \langle x, {}^t u(y^*) \rangle = \langle u(x), y^* \rangle = 0$$

car $u(x) \in F$ puisque F est stable par u .

Ainsi,

$${}^t u(y^*) \in F^\perp$$

- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, ${}^t({}^t u) \neq u$.

Chapitre 5

Formes bilinéaires - formes quadratiques

5.1 Formes bilinéaires symétriques (fbs)

Définition 1 :

$$\begin{aligned}\varphi &: E \times E \longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x, y)\end{aligned}$$

est dite forme bilinéaire si on a :

$$\forall x \in E, \quad \varphi_x : E \longrightarrow K \\ y \longmapsto \varphi_x(y) = \varphi(x, y)$$

est linéaire,
et

$$\forall y \in E, \quad \varphi_y : E \longrightarrow K \\ x \longmapsto \varphi_y(x) = \varphi(x, y)$$

est linéaire.
i.e.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta x', y) &= \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x', y) \\ \varphi(x, \alpha y + \beta y') &= \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, y')\end{aligned}$$

★ Remarque :

Une forme bilinéaire n'est pas linéaire en général.

En effet, soit φ une forme bilinéaire sur E . Pour tous $(x, y), (x', y') \in E^2$, on a

$$\begin{aligned}\varphi((x, y) + (x', y')) &= \varphi(x + x', y + y') = \varphi(x, y + y') + \varphi(x', y + y') \\ &= \varphi(x, y) + \varphi(x, y') + \varphi(x', y) + \varphi(x', y') \\ &\neq \varphi(x, y) + \varphi(x', y')\end{aligned}$$

◇ Exemples :

1.

$$\begin{aligned}\varphi &: M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ (A, B) &\longmapsto \operatorname{tr}(AB)\end{aligned}$$

Pour tout $B \in M_n(\mathbb{K})$, $\varphi(0, B) = \operatorname{tr}(0) = 0$

Pour tous $A, A', B \in M_n(\mathbb{K})$, et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(A + \alpha A', B) = \operatorname{tr}((A + \alpha A')B) = \operatorname{tr}(AB) + \alpha \operatorname{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \alpha \varphi(A', B)$$

On démontre de même la linéarité par rapport à la deuxième composante.

φ est donc une forme bilinéaire.

2. Soit $a \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K} \\ (P, Q) &\longmapsto P(a)Q(a)\end{aligned}$$

est une forme bilinéaire.

3. Soit $E = \mathbb{K}^2$. Pour tout $x \in E$, on note $x = (x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned}\varphi &: E^2 \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto x_1y_2 + x_2y_1\end{aligned}$$

Pour tout $y \in E$, $\varphi(0, y) = 0$.

Pour tous $x, x', y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + x', y) &= ((\alpha x_1 + x'_1, \alpha x_2 + x'_2), (y_1, y_2)) = (\alpha x_1 + x'_1)y_2 + (\alpha x_2 + x'_2)y_1 \\ &= \alpha(x_1y_2 + x_2y_1) + (x'_1y_2 + x'_2y_1) \\ &= \alpha\varphi(x, y) + \varphi(x', y)\end{aligned}$$

D'où la première linéarité. La deuxième linéarité se démontre de la même manière.

Définition 2 :

On appelle forme bilinéaire symétrique (fbs) toute forme bilinéaire qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

★ Remarque :

Si φ est une fbs, la première linéarité équivaut à la deuxième linéarité.

Définition 3 :

On note $BL(E) = \{\text{formes bilinéaires sur } E\}$ et $BS(E) = \{\text{fbs sur } E\}$

Proposition 4 :

$BL(E)$ est un \mathbb{K} -ev (sev de $(\mathbb{K}^{E \times E}, +, \cdot)$)

◇ Exemple :

Soit $E = \mathbb{R}^2$, et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tous $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in E$ par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$$

Pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

On vérifie la linéarité par rapport à la première composante.

Par suite, $\varphi \in BS(E)$.

Expressions matricielles dans le cas où E est de dimension finie :

Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 1$, et $B = (e_i)$ base de E .

Définition 5 :

On appelle matrice de $\varphi \in BS(E)$ dans B la matrice symétrique notée

$$M(\varphi; B) = M_B(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n}$$

En d'autres termes $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

◇ Exemple :

Soient $E = \mathbb{K}^2$, et φ la fbs définie pour tous $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in E$, par

$$\varphi(x, y) = \alpha x_1y_1 + \beta x_1y_2 + \beta x_2y_1 + \gamma x_2y_2$$

En notant B_0 la base canonique de E , on a

$$M(\varphi, B_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{21} = \varphi(e_2, e_1) = \varphi((0, 1), (1, 0)) = \beta$$

$$a_{12} = \varphi(e_1, e_2) = \varphi((1, 0), (0, 1)) = \beta$$

$$a_{11} = \varphi(e_1, e_1) = \varphi((1, 0), (1, 0)) = \alpha$$

$$a_{22} = \varphi(e_2, e_2) = \varphi((0, 1), (0, 1)) = \gamma$$

Donc

$$M(\varphi, B_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

★ Remarque :

$$\begin{aligned} BS(E) &\xrightarrow{\sim} S_n(K) = \{\text{matrices symétriques d'ordre } n\} \\ \varphi &\mapsto M(\varphi; B) \end{aligned}$$

Bijection réciproque :

$$\begin{aligned} S_n(K) &\xrightarrow{\sim} BS(E) \\ A = (a_{ij})_{ij} &\mapsto \varphi; \varphi(e_i, e_j) = a_{ij} \end{aligned}$$

Donc $\dim BS(E) = \dim S_n(K) = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\star \text{ Soit } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \in E$$

$$\text{Posons } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Alors $\varphi(x, y) = {}^t XAY$, avec $A = M(\varphi; B)$

En effet :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, y\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i, y) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \varphi(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) \\ &= {}^t XAY \end{aligned}$$

★ Remarque :

Puisque φ est symétrique, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) = {}^t YAX$

Formule de changement de Bases

Soient $B = (e_i)$ et $B' = (e'_i)$ deux bases de E , $P = P_{BB'}$, X et Y les coordonnées de x et y dans la base B et X' et Y' leurs coordonnées dans la base B' . Ainsi $X = PX'$ et $Y = PY'$.

Si $A = M(\varphi; B)$ et $A' = M(\varphi; B')$, alors $A' = {}^t PAP$.

En effet :

$$\varphi(x, y) = {}^t XAY = {}^t X'A'Y'$$

Or

$${}^t XAY = {}^t (PX')A(PY') = {}^t X'^t PAPY' = {}^t X'({}^t PAP)Y'$$

Donc

$${}^t X'A'Y' = {}^t X'({}^t PAP)Y'$$

Ceci étant vérifié pour tous $X', Y' \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a

$$A' = {}^t PAP$$

A' est aussi une matrice symétrique :

$${}^t A = {}^t ({}^t PAP) = {}^t P^t A^t ({}^t P) = {}^t PAP$$

Puisque $S_n(K) \xrightarrow{\sim} BS(E)$ pour B' , alors A' est unique, *i.e.* $A' = {}^t PAP$.

Définition 6 :

Soient $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A' = {}^t P A P$$

on dit que A et A' sont congruentes.

★ Remarque :

Deux matrices congruentes ont le même rang.)

5.2 Formes quadratiques

Définitions 7 :

1. Soit $\varphi \in BS(E)$, l'application

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto \varphi(x, x) \end{aligned}$$

s'appelle la forme quadratique (fq) associée à φ .

2. Une application $q : E \longrightarrow K$ est dite forme quadratique s'il existe $\varphi \in BS(E)$ telle que

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) = q(x)$$

φ s'appelle la forme polaire de q .

3. On note

$$Q(E) = \{fq \text{ sur } E\}$$

★ Remarques :

1. $Q(E)$ est un K -ev (sev de $(K^E, +, \cdot)$)

2.
$$\begin{aligned} Q(E) &\xrightarrow{\sim} BS(E) \\ q &\longmapsto \varphi(\varphi(x, x) = q(x)) \end{aligned}$$

◇ Exemples :

- 1.

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{K})^2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (A, B) &\longmapsto tr(AB) \in BS(E) \end{aligned}$$

$$q(A) = tr(A^2)$$

2. Soit $a \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \varphi : K[X] \times K[X] &\longrightarrow K \\ (P, Q) &\longmapsto P(a)Q(a) \end{aligned}$$

$$q(P) = (P(a))^2$$

3. Soit $E = \mathbb{K}^2$

$$\begin{aligned} \varphi : E^2 &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 \end{aligned}$$

$$q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

Propriétés 8 :

Propriétés d'une fq

Soient φ fbs sur E et q la fq associée. Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

1. $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ ($q(0_E) = 0$).
2. $q(-x) = q(x)$.
3. $q(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 q(x) + 2\alpha\beta\varphi(x, y) + \beta^2 q(y)$.
4. $q(x + y) = q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y)$ (1).
5. $q(x - y) = q(x) - 2\varphi(x, y) + q(y)$ (2).

6. Formules de polarisation :

$$(a) \quad (1) \implies \varphi(x, y) = \frac{1}{2} [q(x + y) - q(x) - q(y)].$$

$$(b) \quad (1) - (2) \implies \varphi(x, y) = \frac{1}{4} [q(x + y) - q(x - y)].$$

7. Si E est de dimension finie, on note $\dim E = n \geq 1$, $B = (e_i)$ une base de E , wt $A = M(\varphi; B) = (a_{ij})$ où $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, pour tout $x \in E$,

$$q(x) = \varphi(x, x) = {}^t XAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{ij}$$

Donc

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Déduction de l'expression analytique de $\varphi(x, y)$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (x_i y_j + y_i x_j)$$

◇ Exemples :

1. Soient $E = \mathbb{K}^n$, et B la base canonique de E .

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est le produit scalaire canonique de \mathbb{K}^n .

2. Soient $E = K^2$, et

$$\begin{aligned} q &: E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 \end{aligned}$$

Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = x_1y_1 + (x_1y_2 + y_1x_2) - 3x_2y_2$.

Proposition 9 :

Caractérisation d'une fq Soit $q : E \longrightarrow K$ une application.

Alors q est une fq sur E ssi

$$\begin{aligned} \varphi &: E \times E \longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x, y) = \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)] \end{aligned}$$

est bilinéaire, et

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$

Dans ce cas, φ est la forme polaire de q .

Inégalités de Cauchy-Schwartz

Dans ce paragraphe, on considère $K = \mathbb{R}$.

Définition 10 :

Soient φ fbs et q la fp associée.

1. On dit que q est positive si

$$\forall x \in E, q(x) \geq 0$$

2. On dit que q est définie si

$$\forall x \in E, (q(x) = 0 \implies x = 0)$$

3. On dit que φ est définie positive si

$$\forall x \in E, (x \neq 0 \implies q(x) > 0)$$

Théorème 11 :

Inégalité de Cauchy-Schwartz Si q est une fq positive sur E , alors

$$\forall x, y \in E, (\varphi(x, y))^2 \leq q(x)q(y)$$

Si q est définie, on a l'égalité si, et seulement si, (x, y) est liée.

Preuve :

Pour tous $\lambda \in K$, $\forall x, y \in E$, q étant positive, $q(y + \lambda x) \geq 0$. D'où

$$q(y + \lambda x) \lambda^2 q(x) + 2\lambda \varphi(x, y) + q(y) \geq 0$$

Si $q(x) = 0$, alors $\varphi(x, y) = 0$. En effet, supposons que $\varphi(x, y) \neq 0$. Dans ce cas,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, 2\lambda\varphi(x, y) + q(y) \geq 0$$

Or on sait que ce trinôme change de signe pour $\lambda = -\frac{q(y)}{2\varphi(x, y)}$.

Ainsi $\varphi(x, y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Si $q(x) \neq 0$, on a un trinôme du second degré en λ qui garde un signe constant.

Donc $\nabla' \leq 0$ et par suite,

$$(\varphi(x, y))^2 - q(x) - q(y) \leq 0$$

L'inégalité est donc vérifiée.

Supposons maintenant que q est définie.

Si (x, y) est liée, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$. Dans ce cas, on a

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, \alpha x) = \alpha q(x)$$

Or

$$q(x)q(y) = q(x)q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)^2$$

Donc

$$(\varphi(x, y))^2 = q(x)q(y)$$

Si on a l'égalité, alors $\Delta' = 0$ et $\lambda_0 = -\frac{\varphi(x, y)}{q(x)}$ (racine double du trinôme).

Donc

$$q(y + \lambda_0 x) = 0 \implies y + \lambda_0 x = 0 \implies y = -\lambda_0 x$$

Ainsi, (x, y) est liée.

★ Remarque :

L'inégalité de Cauchy-Shwartz peut s'écrire

$$|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$$

ou de manière équivalente

$$\varphi(x, y) \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$$

(à cause de la bilinéarité de φ).

Proposition 12 :

Inégalité de Minkowski Si q est une fq positive sur E , alors

$$\forall x, y \in E, \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$$

Preuve :

Soient $x, y \in E$

$$\begin{aligned} \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} &\iff q(x+y) \leq q(x) + q(y) + 2\sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} \\ &\iff 2\sqrt{q(x)q(y)} \geq q(x+y) - q(x) - q(y) \\ &\iff 2\sqrt{q(x)q(y)} \geq 2\varphi(x,y) \\ &\iff \varphi(x,y) \leq \sqrt{q(x)q(y)} \end{aligned}$$

On retrouve donc Cauchy-Schwartz.

5.3 Orthogonalité relativement à une fbs (ou à une fq associée)

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{K} -ev, φ est une fbs sur E et q la fq associée.

Définitions 13 :

1. $x, y \in E$ sont dits orthogonaux (pour φ) si $\varphi(x, y) = 0$.
2. $A \subset E \neq \emptyset$ et $x \in E$. On dit que x est orthogonal à A si

$$\forall y \in A, \varphi(x, y) = 0$$

On appelle orthogonal de A la partie de E notée et définie par

$$A^\perp = \{x \in E ; \forall a \in A, \varphi(x, a) = 0\}$$

3. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si $\forall i, j \in I, i \neq j \implies x_i \perp x_j \implies \varphi(x_i, x_j) = 0$

Propriétés 14 :

1. Si $A \subset E$, alors A^\perp est un sev de E .
2. $\{0_E\}^\perp = E$.
3. Si $A \subset E$, alors $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$.
4. Si $A, B \subset E$, alors

$$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$$

5. Si F est un sev de E donc $F \subset F^{\perp\perp}$.

Preuve :

A faire en exercice.

★ Remarque :

$E^\perp \neq \{0\}$ en général.

Définitions 15 :

1. On appelle le noyau de φ le sev de E noté et défini par :

$$\text{Ker } \varphi = E^\perp = \{x \in E ; \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$$

Remarque : $\{0_E\} \subset E^\perp$.

2. On dit que φ est dégénérée (resp. non dégénérée) si $\text{Ker } \varphi \neq \{0\}$ (resp. $\text{Ker } \varphi = \{0\}$).
 3. Lorsque E est de dimension finie $n \geq 1$, on appelle rang de φ l'entier défini et noté par :

$$\text{rg}(\varphi) = \dim E - \dim \text{Ker } \varphi$$

◇ Exemple :

Soient $E = \mathbb{R}^2$, et φ la fbs sur E définie pour tous $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in E$ par

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1$$

$$a = (a_1, a_2) \in E^\perp \iff \forall x \in E, \varphi(x, a) = 0 \iff \forall x_1 \in \mathbb{R}, x_1 a_1 = 0 \iff a_1 = 0.$$

Donc $\text{Ker } \varphi = \{(0, a_2) ; a_2 \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$. D'où φ est dégénérée.

★ Remarque :

Important

Soient E de dimension finie $n \geq 1$, $B = (e_i)$ une base de E , φ une fbs sur E , $A = M(\varphi; B) = (a_{ij})_{ij}$ et $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

$$\text{Soient } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$x \in \text{Ker } \varphi \iff X \in \text{Ker } A$$

En effet,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } \varphi &\iff x \in E^\perp \\ &\iff \forall i \in \mathbb{N}_n, \varphi(x, e_i) = 0 \\ &\iff \forall i \in \mathbb{N}_n, \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j, e_i\right) = 0 \\ &\iff \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_i, e_j) = 0 \\ &\iff \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = 0 \\ &\iff AX = 0 \\ &\iff X \in \text{Ker } A \end{aligned}$$

Donc, en pratique, on résoud $AX = 0$.

* Conséquence :

D'après la remarque précédente, $\dim \text{Ker} \varphi = \dim \text{Ker} A$ et $\text{rg} \varphi = \text{rg} A$.

$$(\text{rg} A = n - \dim \text{Ker} A = n - \dim \text{Ker} \varphi = \text{rg} \varphi)$$

◇ Exemples :

Soient $E = \mathbb{R}^2$, et φ la fbs sur E définie pour tous $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in E$ par

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1$$

$$A = M(\varphi; B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc $\text{Ker} \varphi = \text{Vect}\{(0, 1)\} = \text{Vect}\{e_2\}$

$$\text{rg} \varphi = \text{rg} A = 1$$

Définitions 16 :

1. $x \in E$ est dit isotrope pour q (resp. pour φ) si $q(x) = 0$ (resp. $\varphi(x, x) = 0$).
2. On appelle cône isotrope pour φ (pour q), la partie de E notée $C(q) = \{x \in E ; q(x) = 0\}$.
3. F sev de E . On dit que F est totalement isotrope si $F \subset F^\perp$ i.e.

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = 0$$

◇ Exemple :

$E = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$. Donc $q(x) = x_1^2 - x_2^2$. $q(1, 1) = 0$. Donc $e = (1, 1)$ est un vecteur isotrope non nul, donc $e \in C(q) - \{0\}$.

$$C(q) = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, -\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

★ Remarques :

1. Si F est totalement isotrope, alors $F \subset C(q)$.
2. $\text{Ker} \varphi$ est totalement isotrope et par conséquent, $\text{Ker} \varphi \subset C(q)$.
3. q est définie si, et seulement si, $C(q) = \{0\}$.
4. $C(q)$ n'est pas en général un sev de E , mais il est stable pour la loi externe :

$$\forall x \in C(q), \forall \alpha \in K, q(\alpha x) = \alpha^2 q(x) = 0 \implies \alpha x \in C(q)$$

Proposition 17 :

1. Si q est définie alors φ est non dégénérée.
2. Si
 - $K = \mathbb{R}$
 - q est positive
 - φ non dégénérée
 alors q est définie.

Preuve :

1. $\{0\} \subset \text{Ker } \varphi \subset C(q)$. q étant définie $C(q) = \{0\}$. Par suite, $E^\perp = \text{Ker } \varphi = \{0\}$ et φ est non dégénérée.
2. Soit $x \in E$, tel que $q(x) = 0$, pour tout $y \in E$, on a

$$(\varphi(x, y))^2 \leq q(x)q(y) = 0$$

Donc $\varphi(x, y) = 0$, et $x \in \text{Ker } \varphi$. Or φ est non dégénérée donc $x = 0$.

Base φ -orthogonale

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 1$.

Définition 18 :

$(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base φ -orthogonale (ou q -orthogonale) si, et seulement si (e_i) est une base de E et

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_n, (i \neq j \implies \varphi(e_i, e_j) = 0)$$

Théorème 19 :

Existence d'une base orthogonale Pour tout $\varphi \in \text{BS}(E)$, il existe une base φ -orthogonale de E .

◇ Exemple :

Soient $E = \mathbb{R}^3$, et $q \in Q(E)$ définie pour tout $X = (x, y, z)$ par

$$q(X) = x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 4yz$$

Déterminons une base q -orthogonale de E :

Soit φ la forme polaire de q . Pour tous $X = (x, y, z), X' = (x', y', z') \in E$, on a

$$\varphi(X, X') = xx' - yy' + 2zz' - (xy' + x'y) + 2(yz' + y'z)$$

e_1 est un vecteur non istrope, en effet, $q(e_1) = 1 \neq 0$. Construction de la base :

On choisit un vecteur $a(x, y, z) \in E$; $\varphi(e_1, a) = 0$

$\varphi(e_1, a) = x - y = 0 \implies x = y$. Donc $a = (x, x, z)$. Choisissons $a = (1, 1, 0)$.

Choisissons $b \in E$, $b \perp e_1, b \perp a$ et (e_1, a, b) libre.

On pose $b = (x, y, z)$ et

$$\begin{cases} \varphi(b, e_1) = 0 \\ \varphi(b, a) = 0 \end{cases}$$

$\varphi(b, e_1) = 0 \iff x = y$

$\varphi(b, a) = x - y - (x + y) + 2z = 0 \iff z = y$

D'où $x = y = z$. On peut choisir $b = (1, 1, 1)$.

(e_1, a, b) est une famille libre puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Comme de plus, $\text{card}(e_1, a, b) = 3 = \dim E$, alors (e_1, a, b) est une base φ -orthogonale de E .

Proposition 20 :

Si $B = (e_i)$ est une base φ -orthogonale de E , alors

$$M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} q(e_1) & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & q(e_n) \end{pmatrix}$$

car $\varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

Corollaire 21 :

$\forall S \in S_n(K), \exists P \in GL_n(K), \exists D \in D_n(K) ; D = {}^t PSP$.

Preuve :

Soit φ la fbs sur \mathbb{K}^n telle que $S = M(\varphi, B_0)$, B_0 étant la base canonique de \mathbb{K}^n . D'après le théorème précédent, il existe une base B , φ -orthogonale de E . Soit $P = P_{B_0 B}$ et $D = M(\varphi, B)$, alors D est diagonale d'après la proposition précédente et $D = {}^t PSP$.

Corollaire 22 :

(Important) Soit q une fq sur E et φ sa forme polaire. Alors q se décompose (au moins d'une façon) en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires :

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^n d_i (L_i(x))^2$$

où les L_i sont des formes linéaires sur E qui sont linéairement indépendantes.

Preuve :

D'après le théorème précédent, il existe une base $B = (e_i)_i$ de E φ -orthogonale. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$.

$$q(x) = q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i)$$

car $\varphi(e_i, e_j) = 0$

On pose $d_i = q(e_i)$ et

$$\begin{aligned} L_i : E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

$L_i \in E^*$ et $q(x) = \sum_{i=1}^n d_i (L_i(x))$ (L_i)_i est libre car c'est la base duale de E .

★ Remarques :

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la décomposition de q sera appelée décomposition de Gauss de q .
2. Si $rg(\varphi) = rg(q) = r$, alors

$$q(x) = \sum_{i=1}^r d_i (L_i(x))^2$$

En effet,

$$rg(\varphi) = rg(M(\varphi, B)) = rg \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$rg(\varphi) = r$ donc r éléments parmi les d_i sont non nuls. On peut supposer que ce sont les r premiers.

3. Détermination de $Ker \varphi$

$$Ker \varphi = \bigcap_{i=1}^r Ker L_i$$

En effet,

$$x \in Ker \varphi \iff \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0$$

Or, pour tout $x \in \sum_{i=1}^n$, $q(x) = \sum_{i=1}^r d_i (L_i(x))$

Donc

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^r d_i L_i(x) L_i(y)$$

Donc

$$\forall y \in E, \left(\sum_{i=1}^r d_i L_i(x) L_i \right) (y) = 0 \iff \sum_{i=1}^r d_i L_i(x) L_i = 0_{E^*}$$

Or $(L_i)_i$ est une famille libre, donc,

$$\forall i \in \mathbb{N}_r, d_i L_i(x) = 0$$

Or $d_i \neq 0$, donc

$$\forall i \in \mathbb{N}_r, L_i(x) = 0 \iff \forall i \in \mathbb{N}_r, x \in Ker L_i \iff x \in \bigcap_{i=1}^r Ker L_i$$

Décomposition dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

E est un \mathbb{C} -ev, φ une fbs sur E , q la fq associée, et $B = (e_i)_i$ une base φ -orthogonale de E , donc pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Soit $r = rg(q)$. Donc

$$\forall i \in \mathbb{N}_r, d_i = q(e_i) \neq 0$$

donc d_i admet dans \mathbb{C} une racine carrée b_i , i.e. $d_i = b_i^2$.

On effectue le changement de bases suivant :

$$\begin{aligned} e'_i &= \frac{1}{b_i} e_i \quad \forall i \in \mathbb{N}_r \\ e'_i &= e_i \quad \forall i \in \{r+1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Comme $(e_i)_i$ est une base φ -orthogonale, il en est de même pour $B' = (e'_i)_i$.

Donc $\forall i \in \mathbb{N}_r$ $q(e'_i) = q(\frac{1}{b_i} e_i) = \frac{1}{b_i^2} q(e_i) = 1$ et $\forall i \in \{r+1, \dots, n\}$ $q(e'_i) = q(e_i) = 0$.

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^r x_i e_i + \sum_{i=r+1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^r (x_i b_i) e'_i + \sum_{i=r+1}^n x_i e'_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$$

avec $x'_i = x_i b_i \quad \forall i \in \mathbb{N}_r$ et $x'_i = x_i \quad \forall i \in \{r+1, \dots, n\}$

$$\text{Donc } q(x) = \sum_{i=1}^n x'^2_i q(e'_i) = \sum_{i=1}^r (x'^2_i).$$

D'où $q(x) = \sum_{i=1}^r (L'_i(x))^2$, $(L'_i)_{1 \leq i \leq r}$ étant une famille libre.

On note

$$A_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = M(\varphi; B' = (e'_i))$$

puisque $q(e'_i) = 1$, $1 \leq i \leq r$ et $q(e'_i) = q(e_i) = 0$, $r+1 \leq i \leq n$.

* Conséquence :

Si $S_n(\mathbb{C})$, alors S est congruente à A_r .

Décomposition dans le cas où $K = \mathbb{R}$

Supposons que $d_1, \dots, d_s \in \mathbb{R}_+^*$ et $d_{s+1}, \dots, d_{s+t} \in \mathbb{R}_-^*$, avec $s+t = r$ et $d_{r+1} = \dots = d_n = 0$. On pose :

$$e'_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_i}} e_i & \text{si } 1 \leq i \leq s \\ \frac{1}{\sqrt{-d_i}} e_i & \text{si } s+1 \leq i \leq s+t = r \\ e_i & \text{si } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Comme $(e_i)_i$ est une base φ -orthogonale, il en est de même pour $B' = (e'_i)_i$.

$$q(e'_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq s \\ -1 & \text{si } s+1 \leq i \leq s+t=r \\ 0 & \text{si } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Si $x \in E$,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^s x_i e_i + \sum_{i=s+1}^r x_i e_i + \sum_{i=r+1}^n x_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^s (x_i \sqrt{d_i}) e'_i + \sum_{i=s+1}^r (x_i \sqrt{-d_i}) e'_i + \sum_{i=r+1}^n x_i e'_i \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i e'_i \end{aligned}$$

avec $x'_i = x_i \sqrt{d_i} \forall i = 1, \dots, s$, $x'_i = x_i \sqrt{-d_i} \forall i = s+1, \dots, r$ et $x'_i = x_i \forall i \in \{r+1, \dots, n\}$.

$$\text{Donc } q(x) = \sum_{i=1}^n x'^2_i q(e'_i) = \sum_{i=1}^s x'^2_i - \sum_{i=s+1}^r x'^2_i.$$

On note

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* *Conséquence :*

$\forall S \in S_n(\mathbb{C})$, S est congruente à $A_{s,t}$

Théorème 23 :

Théorème de Sylvester ($K = \mathbb{R}$) :

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension finie $n \geq 1$, φ une fbs sur E , q la fq associée à φ et $r = rq(q)$.

On a vu qu'il existe une base $B = (e_i)$ φ -orthogonale de E tel que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $q(x) =$

$$\sum_{i=1}^r d_i L_i(x)^2, \text{ avec } d_1, \dots, d_s \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } d_{s+1}, \dots, d_r \in \mathbb{R}_-^*, \text{ avec } r = s + t.$$

Le couple (s, t) ne dépend pas de la base φ -orthogonale choisie.

Définition 24 :

On appelle signature de q et on not $sgn(q)$ le couple (s, t) défini précédemment.

* *Remarque :*

1. Si q est positive, donc $sgn(q) = (r, 0)$.
2. Si q est définie positive, donc $sgn(q) = (n, 0)$. (car $r = rq(q) = n - \dim \text{Ker } \varphi$)
3. Si q est négative, donc $sgn(q) = (0, r)$.
4. Si q est définie négative, donc $sgn(q) = (0, n)$.

Décomposition de Gauss d'une fq :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$$

Deux cas se présentent :

1. L'un des a_{ii} est non nul.
2. Tous les a_{ii} sont nuls.

1. L'un des a_{ii} est non nul : Supposons que $a_{11} \neq 0$. On écrit :

$$q(x) = a_{11}[x_1^2 + 2x_1\lambda] + T$$

où $\lambda = \sum_{2 \leq j \leq n} a_{1j}x_j$ et T contient tous les termes ne contenant pas x_1 .

$$q(x) = a_{11}[x_1^2 + 2x_1\lambda + \lambda^2 - \lambda^2] + T = a_{11}[(x_1 + \lambda)^2 - \lambda^2] + T$$

Donc $q(x) = a_{11}(x_1 + \lambda)^2 + (-a_{11}\lambda^2) + \dots$

On note $L_1(x) = (x_1 + \lambda)$ et $q_1(x) = (-a_{11}\lambda^2) + \dots$. On recommence le même travail sur $q_1(x)$.

$$q(x) = \sum_{i=1}^r d_i(L_i(x))^2$$

◇ Exemple :

Donner la décomposition de Gauss de q fq de $E = \mathbb{R}^3$:

$$q(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2xy + 4yz + 2z^2$$

$$a_{11} = 1 \neq 0$$

$$q(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4yz = (x-y)^2 - 2(y^2 - 2yz - z^2) = (x-y)^2 - 2[(y-z)^2 - 2z^2]$$

On pose $L_1(x, y, z) = x - y$, $L_2(x, y, z) = y - z$ et $L_3(x, y, z) = z$.

$$\text{Donc } q(x, y, z) = L_1(x, y, z)^2 - 2L_2(x, y, z)^2 + 4L_3(x, y, z)^2$$

s est le nombre de coefficients strictement positifs : $s = 2$.

t est le nombre de coefficients strictement négatifs : $t = 1$.

$$rg(q) = s + t = 3 \text{ et } sgn(q) = (2, 1).$$

Or $rg(q) = rg(\varphi) = 3 = \dim E$. Donc $\dim \text{Ker } \varphi = 0$, donc φ est non dégénérée.

Construction d'une base φ -orthogonale :

Soit B_0 la base canonique et B la base φ -orthogonale, tel que si un point a comme coordonnées $X = (x, y, z)$ dans B_0 , ses coordonnées $X' = (x', y', z')$ dans B sont définie par :

$$\begin{aligned} x' &= L_1(x, y, z) = x - y \\ y' &= L_2(x, y, z) = y - z \\ z' &= L_3(x, y, z) = z \end{aligned}$$

Soit $P = P_{B_0 B}$. Donc $X = PX'$.

On a $z = z'$, $y = y' + z = y' + z'$ et $x = x' + y = x' + y' + z'$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

Et on a $q(e'_1) = 1$, $q(e'_2) = -2$ et $q(e'_3) = 4$.

Donc

$$M(\varphi; B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Tous les a_{ii} sont nuls :

$q(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$. On peut donc écrire

$$q(x) = 2a_{12}[x_1 x_2 + x_1 \lambda + x_2 \mu] + T$$

où T est la somme de tous les termes ne contenant ni x_1 ni x_2 .

$$q(X) = 2a_{12}[(x_1 + \mu)(x_2 + \lambda) - \lambda\mu] + T = 2a_{12}\left\{\frac{1}{4}[(x_1 + x_2 + \lambda + \mu)^2 - (x_1 - x_2 + \mu - \lambda)^2] - \lambda\mu\right\} + T$$

$$q(X) = \frac{a_{12}}{2}[(x_1 + x_2 + \lambda + \mu)^2 - (x_1 - x_2 + \mu - \lambda)^2] - 2a_{12}\lambda\mu + T$$

On pose $L_1(X) = x_1 + x_2 + \lambda + \mu$, $L_2(X) = x_1 - x_2 + \mu - \lambda$ et $q_2(X) = 2a_{12}\lambda\mu + T$. On recommence le même travail pour q_2 .

◇ *Exemple :*

$E = \mathbb{R}^4$ q une fq de E définie par :

$$q(X) = q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + 2x_1 x_3 + 2x_3 x_4$$

$$2a_{12} = 1 \neq 0.$$

$$\begin{aligned} q(X) &= x_1 x_2 + x_1(2x_3) + x_2(x_3) + 2x_3 x_4 = (x_1 + x_3)(x_2 + 2x_3) - 2x_3^2 + 2x_3 x_4 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + x_3 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3)^2 + q_1(X) \end{aligned}$$

avec $q_1(X) = -2x_3^2 + 2x_3 x_4 = -2[x_3^2 - x_3 x_4]$ ce qui nous ramène au premier cas.

$$q_1(X) = -2\left[\left(x_3 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{4}x_4^2\right] = -2(L_3(X))^2 + \frac{1}{2}(L_4(X))^2$$

Avec $L_3(X) = x_3 - \frac{1}{2}x_4$ et $L_4(X) = x_4$.

Donc $\text{sgn}(q) = (2, 2)$, donc $\text{rg } q = 4 = \dim E$ et φ est non dégénérée.

$$M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Chapitre 6

Espaces euclidiens

Les ev considérés sont des ev réels ($K = \mathbb{R}$)

6.1 Produit scalaire

Définition 1 :

E est un \mathbb{R} -ev. On appelle produit scalaire sur E , toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E .

On notera $\langle x, y \rangle$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire du couple (x, y) .

* *Conséquences :*

1. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrique).
2. $\forall x, x', y \in E, \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ (bilinéaire).
3. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ (positive).
4. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ (définie).

◇ *Exemples :*

1. Produit scalaire canonique (ou usuel) sur \mathbb{R}^n :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ où $B_0 = (e_i)$ est la base canonique, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

2. $E = f([a, b], \mathbb{R})$ ev de fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_a^b fg$$

avec $a < b$. C'est un produit scalaire. En effet :
c'est une fbs (évident).

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2 \geq 0 \text{ car } f \text{ étant continue, } f^2 \text{ l'est aussi et } f^2 \geq 0.$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \implies \int_a^b f^2 = 0 \implies f^2 = 0 \implies f = 0.$$

Propriétés 2 :

Propriétés du produit scalaire On note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ($= \sqrt{q(x)}$)

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$
2. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$
3. $\implies \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (identité du parallélogramme)
4. $\implies \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle \iff \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$
5. $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2.$
6. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

En effet $\|\lambda x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Inégalités de Cauchy et de Minkowsky

Puisque le produit scalaire est une fbs définie positive on a les inégalités de Cauchy et de Minkowsky.

Inégalité de Cauchy :

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

On a l'égalité ssi x et y sont liés.

Inégalité de Minkowsky (inégalité triangulaire) :

$$\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

On a l'égalité ssi $x = 0$ ou x et y liés.

Norme euclidienne

L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

est une norme sur E appelée la norme euclidienne associée au produit scalaire.

En effet :

- $\|x\| = 0 \implies \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ (définie).
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (déjà démontré).
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité de Minkowsky)

C'est donc une norme.

Distance euclidienne

L'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

et appelée distance euclidienne.

Définition 3 :

On appelle espace vectoriel euclidien (eve) tout couple (E, φ) où E est un \mathbb{R} -ev de dimension finie et φ un produit scalaire sur E .

On le notera $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

6.2 Orthogonalité

Définitions 4 :

1. $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$.
2. Si $A \subset E$, $A^\perp = \{x \in E; \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$.

Propriétés 5 :

1. Si $A \subset E$, $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$.
2. Si $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
3. Si F sev de E , alors $F \subset F^{\perp\perp}$ (on démontrera l'égalité).
4. $\{0_E\}^\perp = E$.
5. $E^\perp = \{0_E\}$ car φ est définie.
6. $A \subset E$, $A \cap A^\perp \subset \{0_E\}$ (Si A est un sev, alors $A \cap A^\perp \subset \{0_E\}$).
7. $\forall x, y \in E, x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
En effet, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$. Et $\langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y$.

★ Remarque :

Si $x_1, \dots, x_n \in E$ sont 2 à 2 orthogonaux (famille orthogonale), alors $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

La réciproque n'est pas toujours vraie si $n \geq 3$.

Définition 6 :

On appelle famille orthonormale toute famille orthogonale $(x_i)_{i \in I}$ telle que $\forall i \in I, \|x_i\| = 1$.

Procédé d'orthogonalisation de Schmidt :

Proposition 7 :

Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.

Preuve :

Soit (x_1, \dots, x_p) ($p \leq n = \dim E$) une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$. Donc $\forall j \in \mathbb{N}_p$, $\left\langle x_j, \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\rangle = 0$.

Donc $0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x_j, x_i \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = \lambda_j \|x_j\|^2$ (orthogonalité).

Or $x_j \neq 0$, donc $\|x_j\| \neq 0$. D'où $\lambda_j = 0 \forall j \in \mathbb{N}_p$.

On a donc une famille libre.

* Conséquence :

Toute famille orthonormale de cardinal $\leq n$ est libre.

Théorème 8 :

Théorème de Schmidt Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de E , alors il existe une famille (v_1, \dots, v_p) telle que :

- (v_1, \dots, v_p) orthogonale
- $\forall i \in \mathbb{N}_p, v_i \neq 0$
- $\forall k \in \mathbb{N}_p, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$

Preuve :

On pose $v_1 = e_1 \neq 0$.

Soit $v_2 = e_2 + \alpha v_1 = e_2 + \alpha e_1$. Trouvons α tel que $v_2 \perp v_1$.

$$\langle e_2 + \alpha e_1, e_1 \rangle = 0 \iff \langle e_2, e_1 \rangle + \alpha \langle e_1, e_1 \rangle = 0 \iff \langle e_2, e_1 \rangle + \alpha \|e_1\|^2 = 0 \iff \alpha = -\frac{\langle e_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2}.$$

Donc α existe

De plus, $\forall i, v_i \neq 0_E$ car si $v_2 = 0$, $e_2 = -\alpha e_1$ contradiction avec (e_1, e_2) libre. Et $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ car $v_1 = e_1$ et $v_2 = e_2 + \alpha e_1$.

On pose $v_3 = e_3 + \beta v_2 + \gamma v_1$, et on cherche β et γ de sorte que $v_3 \perp v_1$ et $v_3 \perp v_2$.

Supposons que v_1, \dots, v_k sont construits tel que :

- (v_1, \dots, v_k) orthogonale et $\forall i, v_i \neq 0$.
- $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, $1 \leq i \leq k$.

Construisons v_{k+1} ($2 \leq k \leq p-1$).

$$\text{Posons } v_{k+1} = e_{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_{i,k+1} v_i.$$

Il faut que $v_{k+1} \perp v_j, \forall j = 1, \dots, k$.

Or $\langle v_{k+1}, v_j \rangle = \langle e_{k+1}, v_j \rangle + \sum_{i=1}^k \lambda_{i,k+1} \langle v_i, v_j \rangle$. Or (v_1, \dots, v_k) est orthogonale donc $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \forall i \neq j$.

Donc $\langle v_{k+1}, v_j \rangle = \langle e_{k+1}, v_j \rangle + \lambda_{j,k+1} \|v_j\|^2$.

$v_{k+1} \perp v_j \implies \langle v_{k+1}, v_j \rangle = 0$. Donc

$\langle e_{k+1}, v_j \rangle + \lambda_{j,k+1} \|v_j\|^2$. D'où

$$\lambda_{j,k+1} = -\frac{\langle e_{k+1}, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

Comme $\|v_j\| \neq 0$, alors $\lambda_{j,k+1}$ existe donc v_{k+1} existe et la famille (v_1, \dots, v_{k+1}) est orthogonale.

De plus $v_{k+1} \neq 0$ car sinon $e_{k+1} \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, donc (e_1, \dots, e_{k+1}) sera liée, contradiction.

Enfin $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ car $e_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_{i,k+1} v_i$, donc $e_{k+1} \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1})$ et $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Corollaires 9 :

1. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale de E .
2. *Existence d'une base orthonormale :*
Tout espace vectoriel admet une base orthonormale au moins.

Preuve :

1. Soit (e_1, \dots, e_p) une famille orthonormale ($1 \leq p \leq n$). Complétons cette famille libre en une base $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E .

Appliquons le procédé de Schmidt à B .

On pose $v_i = e_i$ pour $i = 1, \dots, p$.

Pour $i = p+1, \dots, n$, on pose : $v_i = e_i + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{k,i} v_k$.

D'après le procédé, il existe une famille orthogonale B' formée de vecteurs non nuls $B' = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$, $v_i \neq 0 \forall i \in \mathbb{N}_n$. Donc B' est libre et $\text{card } B' = \dim E = n$. Donc B' est une base orthogonale.

En posant $u_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$, on a que (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormale de E .

2. Soit e un vecteur unitaire de E ($\|e\| = 1$), donc $\{e\}$ est une famille orthonormale. D'après le Corollaire 1, on peut la compléter en une base orthonormale.

Exemple :

$E = \mathbb{R}^3$. $\forall x, y \in E$, on pose :

$$\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 + 5x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$$

Montrer que c'est un produit scalaire. Chercher une base orthonormale à partir de la base canonique en utilisant le procédé de Schmidt.

Solution :

C'est une fbs (facile).

$$\langle x, x \rangle = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3$$

$$\text{Décomposition de Gauss : } \langle x, x \rangle = 3 \left(x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_3) \right)^2 + \frac{11}{3} \left(x_2 + \frac{x_3}{11} \right)^2 + \frac{153}{11} x_3^2 \geq 0.$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \implies L_1(x) = L_2(x) = L_3(x) = 0$$

$$L_3(x) = 0 \implies x_3 = 0 \text{ or } L_2(x) = 0, \text{ donc } x_2 = 0 \text{ et enfin } L_1(x) = 0 \implies x_1 = 0. \text{ Donc } x = 0.$$

C'est donc une fbs définie positive, donc un produit scalaire.

Procédé d'orthogonalisation de Schmidt :

$$\text{On a } \|e_1\| = 3, \|e_2\| = 4, \|e_3\| = 5$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = 1, \langle e_1, e_3 \rangle = -1, \langle e_2, e_3 \rangle = 0$$

$$\text{On pose } v_1 = e_1, \text{ donc } \|v_1\|^2 = 3 \text{ et } \|v_1\| = \sqrt{3}$$

$$v_2 = e_2 + \alpha v_1, \alpha = -\frac{\langle v_1, e_2 \rangle}{\|v_1\|^2} = -\frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\|e_1\|^2} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } v_2 = e_2 - \frac{1}{3}e_1 \text{ et } \|v_2\|^2 = \|e_2\|^2 - \frac{2}{3}\langle e_1, e_2 \rangle + \frac{1}{9}\|e_1\|^2 = \frac{11}{3} \text{ et } \|v_2\| = \sqrt{\frac{11}{3}}.$$

On pose $v_3 = e_3 + \beta v_2 + \gamma v_1$ avec

$$\beta = -\frac{\langle e_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2}$$

$$\text{Or } \langle e_3, v_2 \rangle = \left\langle e_3, e_2 - \frac{1}{3}e_1 \right\rangle = \langle e_3, e_2 \rangle - \frac{1}{3}\langle e_3, e_1 \rangle = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc } \beta = -\frac{1}{3} \frac{3}{11} = -\frac{1}{11}$$

$$\text{et } \gamma = -\frac{\langle e_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = -\frac{\langle e_3, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc } v_3 = e_3 - \frac{1}{11}v_2 + \frac{1}{3}v_1 \text{ et } \|v_3\|^2 = \frac{153}{33} = \frac{51}{11}.$$

Donc (v_1, v_2, v_3) est une base orthogonale et $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right)$ est une base orthonormale.

* Remarque :

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eve. Si $B = (e_i)$ est une bon de E , alors $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

En effet : si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $\forall j \in \mathbb{N}_n, \langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij} = x_j$.

Expression matricielle d'un produit scalaire (dans une bon) :

Soit $B = (e_i)$ une base de E . En notant φ le produit scalaire, $M(\varphi; B) = I_n$. Donc $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = {}^t XY = {}^t YX = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = {}^t X X = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Supplémentaire orthogonal :

Soit F un sev de E , alors F^\perp est un supplémentaire de F appelé le supplémentaire orthogonal de F .

Preuve :

F étant un sev $F \cap F^\perp = \{0\}$.

$$E = F + F^\perp?$$

Soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormale de F complétée en une bon $B = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ de E .

Alors $E = Vect(e_1, \dots, e_p) \oplus Vect(e_{p+1}, \dots, e_n)$ (car B est libre). Or $F = Vect(e_1, \dots, e_p)$.

$$\forall x \in F^\perp \iff \langle x, e_i \rangle = 0, \forall i \in \mathbb{N}_p \iff x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=p+1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \iff x \in Vect(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Donc $F^\perp = Vect(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

$$\text{Donc } E = F \oplus F^\perp.$$

* Conséquences :

1. $\forall F$ sev de E , $\dim F^\perp = n - \dim F$.
2. $F^{\perp\perp} = F$ (on a $F \subset F^{\perp\perp}$ et $\dim F^{\perp\perp} = n - \dim F^\perp = n - (n - p) = p = \dim F$)

Projection et symétrie orthogonale :

Rappel : $p \in \mathcal{L}(E)$ est dit une projection si $p \circ p = p \iff E = Im p \oplus Ker p$ (on dit que p est la projection sur $Im p$ parallèlement à $Ker p$).

* Si $E = F \oplus G$ et $p \in \mathcal{L}(E)$, on dit que p est la projection sur F parallèlement à G si pour $x \in E$, $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_1 + x_2) = x_1 \text{ si } x \in F \\ p(x) &= p(x_1 + x_2) = 0 \text{ si } x \in G \end{aligned}$$

Donc $Inv(p) = Im p = F$ avec $Inv(p) = \{x \in E ; p(x) = x\}$ et $Ker p = G$.

* Conséquence :

$$p \circ p = p \quad (Im p = F \text{ et } Ker p = G)$$

Symétrie (vectorielle) :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On dit que s est une symétrie si $s \circ s = e$.

Si $s \circ s = e$, alors $E = Inv(s) \oplus Opp(s)$ avec $Opp(s) = \{x \in E ; s(x) = -x\}$.

Preuve :

$$\text{Soit } x \in E, x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x)).$$

$$s\left(\frac{1}{2}(x + s(x))\right) = \frac{1}{2}s(x + s(x)) = \frac{1}{2}(s(x) + x). \text{ Donc } \frac{1}{2}(x + s(x)) \in \text{Inv}(s).$$

$$s\left(\frac{1}{2}(x - s(x))\right) = \frac{1}{2}s(x - s(x)) = \frac{1}{2}(s(x) - x). \text{ Donc } \frac{1}{2}(x - s(x)) \in \text{Opp}(s).$$

Si $x \in \text{Inv}(s) \cap \text{Opp}(s) \implies s(x) = x$ et $s(x) = -x$ donc $x = -x = 0$. Donc $\text{Inv}(s) \cap \text{Opp}(s) = \{0\}$.

★ Remarque :

$x \in E \iff x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Inv}(s)$ et $x_2 \in \text{Opp}(s) \implies s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$.

Réciproque :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ et $E = F \oplus G$. On dit que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G si $s(x) = x_1 - x_2$, $x_1 \in F$, $x_2 \in G \implies s \circ s = e$.

Définition 10 :

F sev de E .

1. $p \in \mathcal{L}(E)$ est dit projection orthogonale sur F , si p est la projection sur F parallèlement à F^\perp .
2. $s \in \mathcal{L}(E)$ est dite symétrie orthogonale par rapport à F si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp .

On les note respectivement p_F et s_F .

★ Remarque :

$$s_F = 2p_F - e$$

En effet, $2p(x) - e(x) = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2 = s(x)$.

Proposition 11 :

Caractérisation d'une projection orthogonale

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$; $p \circ p = p$.

p est orthogonale ssi p est un endomorphisme symétrique (c.à.d $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$).

Preuve :

$\implies ?$ Supposons que p est une projection orthogonale alors c'est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$ avec $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et $\text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp$

$$\forall x \in E, x - p(x) \in \text{Ker } p$$

$$\forall x, y \in E, \langle p(x), y \rangle = \langle p(x), y + p(y) - p(y) \rangle = \langle p(x), y - p(y) \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle$$

Or $\langle p(x), y - p(y) \rangle = 0$ car $p(x) \in \text{Im } p$ et $y - p(y) \in (\text{Im } p)^\perp$.

Donc $\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$.

De même $\forall x, y \in E, \langle x, p(y) \rangle = \langle x - p(x) + p(x), p(y) \rangle = \langle x - p(x), y \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$

\Leftarrow ? Supposons p symétrique.

$$p \circ p = p \implies E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p.$$

Il suffit de montrer que $\text{Ker } p = \{\text{Im } p\}^\perp$.

Soit $x \in \text{Ker } p \implies p(x) = 0$.

$\forall y \in \text{Im } p, \exists z \in E; y = p(z)$.

$$\langle x, y \rangle = \langle x, p(z) \rangle = \langle p(x), z \rangle = \langle 0, z \rangle = 0.$$

Donc $x \in (\text{Im } p)^\perp$ et $\text{Ker } p \subset (\text{Im } p)^\perp$.

D'autre part, $\dim (\text{Im } p)^\perp = n - \dim \text{Im } p = n - n + \dim \text{Ker } p = \dim \text{Ker } p$.

$$\text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp.$$

Donc $E = \text{Im } p \oplus (\text{Im } p)^\perp$ et p est orthogonale.

★ Remarque :

Important

1. $p \in \mathcal{L}(E), P = M(p, B), B$ bon.

p est une projection orthonormale ssi $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

2. $s \in \mathcal{L}(E), S = M(s, B), B$ bon.

s est une symétrie orthogonale ssi

$$\begin{cases} S^2 = I \\ {}^tS = S \end{cases}$$

Proposition 12 :

Soit F un sev de E et p_F la projection orthogonale sur F . Alors $\forall x \in E, d(x, F) = \inf_{y \in F} (\|x - y\|) = \|x - p_F(x)\|$.

Preuve :

$$\forall y \in F, \|x - y\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 + 2 \langle x - p_F(x), p_F(x) - y \rangle.$$

Or $x - p_F(x) \in \text{Ker } p = F^\perp$ et $p_F(x) - y \in F$.

$$\text{Donc } \|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2 \forall y \in F.$$

Proposition 13 :

Soit F un sev de dimension p et (e_1, \dots, e_p) une bon de F .

$$\forall x \in F, p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Preuve :

D'après ce qui précède, $p_F(x) \in F$.

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle p(x), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^p \langle p(x) - x + x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^p (\langle p(x) - x, e_i \rangle + \langle x, e_i \rangle) e_i$$

Or $p(x) - x \in \text{Ker } p_F$ et $e_i \in F$, donc $\langle p(x) - x, e_i \rangle = 0$ et $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$.

Isomorphisme canonique entre E et E^* :

E eve.

$$\begin{aligned} \forall u \in E, \theta_u : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x, u \rangle \end{aligned}$$

est linéaire.

En effet, $\theta_u(\lambda x + x') = \langle \lambda x + x', u \rangle = \lambda \langle x, u \rangle + \langle x', u \rangle = \lambda \theta_u(x) + \theta_u(x')$, et $\langle 0, u \rangle = 0$ donc $\theta_u \in E^*$.

Construction de l'isomorphisme : Soit

$$\begin{aligned} \theta : E &\longrightarrow E^* \\ u &\longmapsto \theta_u = \theta(u) \end{aligned}$$

On vérifie que θ est linéaire c'est donc un morphisme.

Soit $u \in \text{Ker } \theta$ donc $\theta_u = \theta(u) = 0_{E^*}$.

Donc $\forall x \in E, \theta_u(x) = 0 \implies \theta_u(x) = \langle x, u \rangle = 0$. En particulier pour $x = u, \langle u, u \rangle = 0 \implies u = 0$. Donc $\text{Ker } \theta = \{0_E\}$ et θ est injectif.

Or $\dim E = \dim E^* \implies [\theta \text{ injectif} \implies \theta \text{ bijectif}]$.

θ est donc un isomorphisme.

Application aux hyperplans :

Soit H un hyperplan ($E = H \oplus \mathbb{R}$), alors $\exists \varphi \in E^* - \{0_{E^*}\}, H = \text{Ker } \varphi$. Donc $\exists x \in E; \varphi(x) \neq 0$.

$\varphi \in E^*$ et θ bijectif donc $\exists! u \in E; \varphi = \theta_u \implies \forall x \in E, \varphi(x) = \theta_u(x) = \langle u, x \rangle$.

Donc $\forall x \in H, \varphi(x) = 0 \implies \forall x \in H, \langle u, x \rangle = 0 \iff u \in H^\perp \iff u^\perp = H$ c.à.d H est l'orthogonal d'un vecteur u non nul, appelé vecteur normal à H .

6.3 Endomorphismes remarquables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire.

6.3.1 Endomorphismes orthogonaux - matrices orthogonales

Définition 14 :

Un endomorphisme f de E est dit orthogonal si et seulement si f conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

On note $O(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ou $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E . C'est un groupe pour la loi \circ , appelé groupe orthogonal de E .

Proposition 15 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $f \in O(E)$
- (ii) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$

★ Remarque :

Les éléments de $O(E)$ sont aussi appelés isométries vectorielles.

Proposition 16 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $f \in O(E)$
- (ii) Pour toute base B de E , $f(B)$ est une base de E .
- (iii) Il existe une base B de E telle que $f(B)$ soit une base de E .

Définition 17 :

Une matrice Ω de $M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si et seulement si l'endomorphisme de \mathbb{R}^n représenté par Ω dans la base canonique de \mathbb{R}^n est un endomorphisme de \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Propriétés 18 :

Soit $\Omega \in M_n(\mathbb{R})$, E un \mathbb{R} -ev de dimension n et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Omega \in On(\mathbb{R})$.
2. ${}^t\Omega\Omega = I_n$.
3. $\Omega{}^t\Omega = I_n$.
4. Pour toute base B de E , l'endomorphisme représenté par Ω dans B est orthogonal.
5. Il existe une base B de E dans laquelle l'endomorphisme représenté par Ω dans B est orthogonal.
6. Les colonnes de Ω forment une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.
7. Les lignes de Ω forment une base de $M_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.

Proposition 19 :

$On(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication, appelé groupe orthogonal (d'ordre n).

Proposition 20 :

1. $\forall \Omega \in On(\mathbb{R}), \det(\Omega) \in \{-1, 1\}$.
2. $\forall f \in O(E), \det(f) \in \{-1, 1\}$.

6.3.2 Endomorphismes symétriques

Définition 21 :

Un endomorphisme f de E est dit symétrique (respectivement anti-symétrique) s'il vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad (\text{resp.} \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle)$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E et $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E . Ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

Propriétés 22 :

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$, alors :

1. Si F est un sous-espace vectoriel stable par f , alors F^\perp est stable par f .
2. $Im f$ et $Ker f$ sont supplémentaires et orthogonaux dans E .
3. Les sous-espaces propres de f sont supplémentaires et orthogonaux.
4. Le polynôme caractéristique de f est scindé sur \mathbb{R} .
5. L'endomorphisme f est diagonalisable dans une base orthonormale (ou encore il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f).

Proposition 23 :

Un endomorphisme de E est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale quelconque de E est symétrique.

Corollaire 24 :

Toute matrice symétrique réelle M est diagonalisable et il existe une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.