Topologie

Ouverts et fermés

Exercice 1 [01103] [correction]
Montrer que tout fermé peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 2 [01104] [correction]
On désigne par p_1 et p_2 les applications coordonnées de $\mathbb{R}^2$ définies par
$p_i(x_1, x_2) = x_i$.
a) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$, montrer que $p_1(O)$ et $p_2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
b) Soit $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$. Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p_1(H)$ et $p_2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$.
c) Montrer que si F est fermé et que $p_2(F)$ est borné, alors $p_1(F)$ est fermé.

Exercice 3 [01105] [correction]
Montrer que si un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé E est ouvert alors $F = E$.

Exercice 4 [01106] [correction]
Soient A, B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E telles que

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) > 0$$

Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 5 [01107] [correction]
Soit E une espace vectoriel normé.
a) Soient F une partie fermée non vide de E et $x \in E$. Montrer

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

b) Soient F et G deux fermés non vides et disjoints de E.
Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que

$$F \subset U, G \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Exercice 6 [01108] [correction]
On muni le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
$A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$,
$C = \{\text{suites convergentes}\}$,
$D = \left\{\text{suites admettant 0 pour valeur d'adhérence}\right\}$ et $E = \{\text{suites périodiques}\}$.

Exercice 7 [01110] [correction]
On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
a) Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées.
b) $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ étant normé par $\|\,.\,\|_\infty$. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie ouverte ? une partie fermée ?

Exercice 8 [01112] [correction]
Soient E_1 et E_2 deux parties fermés d'un espace vectoriel normé E telles que

$$E = E_1 \cup E_2$$

Montrer qu'une application $f : E \to F$ est continue si, et seulement si, ses restrictions f_1 et f_2 au départ de E_1 et de E_2 le sont.

Exercice 9 [02637] [correction]
On note $(.\mid.)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\,.\,\|$ la norme associée. On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(x \mid y) \leqslant \|x\|\,\|y\|$ avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de même sens.
a) Soit $x, a, b \in \mathbb{R}^n$ tel que $a \neq b$ et $\|x - a\| = \|x - b\|$. Montrer que

$$\left\|x - \frac{a + b}{2}\right\| < \|x - a\|$$

b) Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in F$ tel que

$$\|x - a\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

On supposera d'abord que F est borné avant d'étudier le cas général.

c) Soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $a \in A$ tel que

$$\|x-a\| = \inf_{y\in A} \|x-y\|$$

On note $a = P(x)$ ce qui définit une application $P : \mathbb{R}^n \to A$ appelée projection sur le convexe A.
d) Montrer que s'il existe $a \in A$ tel que $(x-a \mid y-a) \leqslant 0$ pour tout $y \in A$, on a $a = P(x)$.
e) On suppose qu'il existe un $y \in A$ tel que

$$(x - P(x) \mid y - P(x)) > 0$$

En considérant les vecteurs de la forme $ty + (1-t)P(x)$ avec $t \in [0,1]$, obtenir une contradiction.
f) Déduire de d) et e) que $a = P(x)$ si, et seulement si, $a \in A$ et $(x-a \mid y-a) \leqslant 0$ pour tout $y \in A$.
g) Etablir que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$(x-y \mid P(x)-P(y)) \geqslant \|P(x)-P(y)\|^2$$

En déduire que P est continue.

Exercice 10 [02415] [correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel il existe un et un seul $y \in A$ tel que $|x-y| = d(x,A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Exercice 11 [02770] [correction]
On munit l'espace des suites bornées réelles $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ de la norme
$\|u\|_\infty = \sup_n(|u_n|)$.
a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
b) Montrer que l'ensemble des suites (a_n) qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Exercice 12 [02771] [correction]
Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à E, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme sur E.
b) Soit

$$F = \left\{ a \in E / \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 13 [03021] [correction]
Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F+G$ est fermé

Exercice 14 [03037] [correction]
Caractériser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices dont la classe de similitude est fermée.
Même question avec $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

Exercice 15 [02507] [correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$$

a) Montrer que A est une partie fermée.
b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$$

Exercice 16 [03066] [correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$$

a) Montrer que A est une partie fermée.
b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$$

c) Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A.

Exercice 17 [03289] [correction]
a) Montrer que les parties

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\right\} \text{ et } B = \{0\} \times \mathbb{R}$$

sont fermées.
b) Observer que $A + B$ n'est pas fermée.

Exercice 18 [03290] [correction]
Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:
a) en observant que son complémentaire est ouvert ;
b) par la caractérisation séquentielle des parties fermées ;
c) en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Exercice 19 [03306] [correction]
Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère les normes

$$N_1(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [1,2]} |P(t)|$$

L'ensemble

$$\Omega = \{P \in E / P(0) \neq 0\}$$

est-il ouvert pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

Intérieur et adhérence

Exercice 20 [01113] [correction]
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que si $\mathring{F} \neq \emptyset$ alors $F = E$.

Exercice 21 [01114] [correction]
Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé (E, N).
a) On suppose $A \subset B$. Etablir $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
b) Comparer $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ d'une part puis $(A \cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$ d'autre part.
c) Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ d'une part puis $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ d'autre part.

Exercice 22 [01115] [correction]
Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E alors son adhérence $\bar{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 23 [03279] [correction]
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Etablir

$$\text{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{Vect} A}$$

Exercice 24 [01116] [correction]
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Etablir que sa frontière $\text{Fr}(A)$ est une partie fermée.

Exercice 25 [01117] [correction]
Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé E. Etablir

$$\text{Fr}(\text{Fr}(F)) = \text{Fr}(F)$$

Exercice 26 [01118] [correction]
Soient A un ouvert et B une partie d'un espace vectoriel normé E.
a) Montrer que $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$
b) Montrer que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Exercice 27 [01119] [correction]
On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.
a) Montrer que $\bar{A}$ est convexe.
b) La partie A° est-elle convexe ?

Exercice 28 [01120] [correction]
Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E.
Etablir

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B)$$

(en notant $d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y)$)

Exercice 29 [01121] [correction]
Soient $A_1,\dots,A_n$ des parties d'un espace vectoriel normé E.
a) Etablir $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.
b) Comparer $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}$ et $\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$.

Exercice 30 [01122] [correction]
Soient $f : E \to F$ continue bornée et $A \subset E$, A non vide. Montrer

$$\|f\|_{\infty,A} = \|f\|_{\infty,\bar{A}}$$

Exercice 31 [02943] [correction]
Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 32 [03026] [correction]
Soit A une partie d'un espace normé E.
a) Montrer que la partie A est fermée si, et seulement si, $\mathrm{Fr}A \subset A$.
b) Montrer que la partie A est ouverte si, et seulement si, $A \cap \mathrm{Fr}A = \emptyset$

Exercice 33 [03470] [correction]
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on introduit

$$\mathcal{U} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})/\mathrm{Sp}M \subset U\} \text{ et } \mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})/\exists n \in \mathbb{N}^\star, M^n = I_2\}$$

a) Comparer les ensembles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{U}$.
b) Montrer que $\mathcal{U}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
c) Montrer que $\mathcal{U}$ est inclus dans l'adhérence de $\mathcal{R}$.
d) Qu'en déduire ?

Continuité et topologie

Exercice 34 [01123] [correction]
Justifier que $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 < x^3+y^3\right\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 35 [01124] [correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 36 [01125] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien.
Montrer que l'ensemble $\left\{(x,y) \in E^2/(x,y) \text{ libre}\right\}$ est un ouvert de E^2.

Exercice 37 [01126] [correction]
Pour $p \in \{0,1,\dots,n\}$, on note R_p l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang supérieur à p.
Montrer que R_p est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 38 [01127] [correction]
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes :
(i) f est continue ;
(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;
(iii) $\forall B \in \mathcal{P}(F), \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$;
(iv) $\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B^\circ) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$.

Exercice 39 [01128] [correction]
Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel normé E est continu si, et seulement si, la partie $\{x \in E/\,\|u(x)\| = 1\}$ est fermée.

Exercice 40 [01129] [correction]
Montrer qu'une forme linéaire est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Exercice 41 [03393] [correction]
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue vérifiant

$$f \circ f = f$$

a) Montrer que l'ensemble

$$\{x \in [0,1]\,/\,f(x) = x\}$$

est un intervalle fermé et non vide.
b) Donner l'allure d'une fonction f non triviale vérifiant les conditions précédentes.
c) On suppose de plus que f est dérivable. Montrer que f est constante ou égale à l'identité.

Exercice 42 [02774] [correction]
a) Chercher les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ continues vérifiant

$$f \circ f = f$$

b) Même question avec les fonctions dérivables.

Exercice 43 [03285] [correction]
Soient E un espace normé de dimension quelconque et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k$$

a) Simplifier $v_n \circ (u - \mathrm{Id})$.
b) Montrer que

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \ker(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$$

c) On suppose E de dimension finie, établir

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u - \mathrm{Id}) = E$$

d) On suppose de nouveau E de dimension quelconque.
Montrer que si

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u - \mathrm{Id}) = E$$

alors la suite (v_n) converge simplement et l'espace $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est une partie fermée de E.
e) Etudier la réciproque.

Exercice 44 [01111] [correction]
Montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 45 [02773] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, O_n désigne l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples et F_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples.
Ces ensemble sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 46 [03726] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
1) $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}, f([a,b])$ est un segment ;
2) $y \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{y\})$ est une partie fermée.
Montrer que f est continue.

Exercice 47 [03859] [correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

Connexité par arcs

Exercice 48 [01147] [correction]
Montrer qu'un plan privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

Exercice 49 [01148] [correction]
Montrer que l'union de deux connexes par arcs non disjoints est connexe par arcs.

Exercice 50 [01149] [correction]
Montrer que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Exercice 51 [01150] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives et l'on souhaite établir que f' s'annule.
a) Etablir que $A = \left\{(x,y) \in I^2, x < y\right\}$ est une partie connexe par arcs de I^2.
b) On note $\delta : A \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\delta(x,y) = f(y) - f(x)$. Etablir que $0 \in \delta(A)$.
c) Conclure en exploitant le théorème de Rolle

Exercice 52 [01151] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ injective et continue. Montrer que f est strictement monotone.
Indice : on peut considérer $\varphi(x,y) = f(x) - f(y)$ défini sur
$X = \left\{(x,y) \in I^2, x < y\right\}$.

Exercice 53 [01152] [correction]
Soient A et B deux parties connexes par arcs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
a) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
b) En déduire que $A + B = \{a + b / a \in A, b \in B\}$ est connexe par arcs.

Exercice 54 [01153] [correction]
Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose $A \cup B$ et $A \cap B$ connexes par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs.

Exercice 55 [01154] [correction]
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 2$
Montrer que la sphère unité $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$ est connexe par arcs.

Exercice 56 [01155] [correction]
Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension $n \geqslant 2$.
a) Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $E \backslash H$ est-il connexe par arcs ?
b) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \leqslant n - 2$. L'ensemble $E \backslash F$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 57 [01156] [correction]
Montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonalisables est connexe par arcs.

Exercice 58 [01157] [correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 59 [01158] [correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 60 [03737] [correction]
[Théorème de Darboux]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $U = \left\{(x, y) \in I^2 / x < y\right\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
b) On note $\tau : U \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\tau(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Justifier

$$\tau(U) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$$

c) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 61 [03867] [correction]
Montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs.

Densité

Exercice 62 [01130] [correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra considérer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices de la forme $A - \lambda I_n$.

Exercice 63 [01131] [correction]
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
a) Montrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
b) Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Exercice 64 [01132] [correction]
Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E.
a) Etablir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E.
b) En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieurs vides est aussi d'intérieur vide.

Exercice 65 [03058] [correction]
Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_n \to +\infty,\ v_n \to +\infty \text{ et } u_{n+1} - u_n \to 0$$

a) Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$.
Montrer que pour tout $a \geqslant u_{n_0}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.
b) En déduire que $\{u_n - v_p / n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
c) Montrer que l'ensemble $\{\cos(\ln n) / n \in \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 66 [03017] [correction]
Montrer que $\{m - \ln n / (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 67 [01133] [correction]
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
a) Justifier l'existence de

$$a = \inf \{x \in H / x > 0\}$$

b) On suppose $a > 0$. Etablir $a \in H$ puis $H = a\mathbb{Z}$.
c) On suppose $a = 0$. Etablir que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 68 [00023] [correction]
a) Montrer que $\{\cos(n) / n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
b) Montrer que $\{\cos(\ln n) / n \in \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 69 [01134] [correction]
On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
a) Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une partie dense de l'espace des suites sommables normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

b) $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie dense de l'espace des suites bornées normé par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ ?}$$

Exercice 70 [01135] [correction]
Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 71 [02779] [correction]
Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est dense ou fermé dans E.

Exercice 72 [02780] [correction]
On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0, +\infty[$ et dont le carré est intégrable. On admet que E est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme

$$\|\,.\,\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

On note E_0 l'ensemble des $f \in E$ telles que f est nulle hors d'un certain segment. On note F l'ensemble des fonctions de E du type $x \mapsto P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x^2/2}$ où P parcourt $\mathbb{R}[X]$. Montrer que E_0 est dense dans E puis que F est dense dans E.

Exercice 73 [02944] [correction]
Soit A une partie convexe et partout dense d'un espace euclidien E.
Montrer que $A = E$.

Exercice 74 [03018] [correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a, b \in A, \frac{a + b}{2} \in A$$

Montrer que A est dense dans l'intervalle $]\inf A, \sup A[$.

Exercice 75 [03020] [correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^{+\star}$ vérifiant

$$\forall (a, b) \in A^2, \sqrt{ab} \in A$$

Montrer que $A \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ est dense dans $]\inf A, \sup A[$.

Exercice 76 [03059] [correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note $N_\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$$

Montrer que N_φ est une norme sur E si, et seulement si, $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 77 [03402] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$(u_n) \text{ strictement croissante, } u_n \to +\infty \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$$

Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{u_m}{u_n} / m > n \right\}$$

est une partie dense dans l'intervalle $[1, +\infty[$

Exercice 78 [03649] [correction]
Soient A et B deux parties denses d'un espace normé E.
On suppose la partie A ouverte, montrer que $A \cap B$ est une partie dense.

Exercice 79 [00012] [correction]
Etablir que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Continuité et densité

Exercice 80 [01136] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Déterminer f.

Exercice 81 [01139] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

a) Montrer que $\mathcal{D} = \{p/2^n / p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
b) Montrer que si f s'annule en 0 et en 1 alors $f = 0$.
c) Conclure que f est une fonction affine.

Exercice 82 [01137] [correction]
Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 83 [01138] [correction]
Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\det(\text{com}A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 84 [03128] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
Exprimer la comatrice de $P^{-1}AP$ en fonction de P, P^{-1} et de la comatrice de A.
b) En déduire que les comatrices de deux matrices semblables sont elle-même semblables.

Exercice 85 [00750] [correction]
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.
a) Calculer $\det \widetilde{A}$.
b) Etudier le rang de $\widetilde{A}$.
c) Montrer que si A et B sont semblables alors $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ le sont aussi.
d) Calculer $\widetilde{\widetilde{A}}$.

Exercice 86 [03275] [correction]
Montrer

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$$

Théorème de Weierstrass

Exercice 87 [01140] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue. Montrer

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On pourra commencer par étudier le cas où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 88 [01141] [correction]
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

alors f est la fonction nulle.

Exercice 89 [01142] [correction]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que

$$\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - P_n(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 90 [01143] [correction]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que $P_n \geqslant 0$ sur $[a,b]$ et $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - P_n(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 91 [01144] [correction]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que

$$N_\infty(f - P_n) \to 0 \text{ et } N_\infty(f' - P_n') \to 0$$

Exercice 92 [01145] [correction]
[Théorème de Weierstrass : par les polynômes de Bernstein]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

a) Calculer

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x),\ \sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) \text{ et } \sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}(x)$$

b) Soient $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$. On forme

$$A = \{k \in [\![0,n]\!] \,/\, |k/n - x| \geqslant \alpha\} \text{ et } B = \{k \in [\![0,n]\!] \,/\, |k/n - x| < \alpha\}$$

Montrer que

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

c) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 93 [01146] [correction]
[Théorème de Weierstrass : par convolution]
n désigne un entier naturel.
On pose

$$a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$$

et on considère la fonction $\varphi_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n}(1-x^2)^n$$

a) Calculer $\int_0^1 t(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$. En déduire que

$$a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{n+1}$$

b) Soit $\alpha \in \left]0,1\right]$. Montrer que (φ_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha,1]$.
c) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ nulle en dehors de $[-1/2,1/2]$.
Montrer que f est uniformément continue.
On pose

$$f_n(x) = \int_{-1}^1 f(x-t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
d) Montrer que f_n est une fonction polynomiale sur $[-1/2,1/2]$
e) Montrer que

$$f(x) - f_n(x) = \int_{-1}^1 (f(x) - f(x-t))\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

f) En déduire que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
g) Soit f une fonction réelle continue nulle en dehors de $[-a, a]$.
Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.
h) Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$.
Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 94 [02828] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

a) Montrer que la fonction f est nulle.
b) Calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$$

c) En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0,+\infty[, \mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on ait

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Lemme de Baire

Exercice 95 [03152] [correction]
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soient F un fermé et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$O_n = \bigcup_{a \in F} B(a, 1/n)$$

O_n est un ouvert (car réunion d'ouverts) contenant F. Le fermé F est donc inclus dans l'intersection des O_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
Inversement si x appartient à cette intersection, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in F$ tel que $x \in B(a_n, 1/n)$. La suite (a_n) converge alors vers x et donc $x \in F$ car F est fermé.
Finalement F est l'intersection des O_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) Soit $x \in p_1(O)$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $a = (x, y) \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\infty(a, \varepsilon) \subset O$ et alors $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset p_1(O)$. Ainsi $p_1(O)$ et de même $p_2(O)$ est ouvert.
b) Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathrm{N}} \in H^{\mathrm{N}}$ telle que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Comme $x_n y_n = 1$, à la limite $xy = 1$.
Par la caractérisation séquentielle des fermés, H est fermé. $p_1(H) = \mathbb{R}^\star$, $p_2(H) = \mathbb{R}^\star$ ne sont pas fermés dans $\mathbb{R}$.
c) Soit $(x_n)_{n\in\mathrm{N}} \in (p_1(F))^{\mathrm{N}}$ telle que $x_n \to x$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe y_n tel que $(x_n, y_n) \in F$.
La suite $((x_n, y_n))$ est alors une suite bornée dont on peut extraire une suite convergente : $((x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}))$.
Notons $y = \lim y_{\varphi(n)}$. Comme F est fermé, $(x, y) = \lim(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in F$ puis $x = p_1((x, y)) \in p_1(F)$.

Exercice 3 : [énoncé]
$0_E \in F$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(0_E, \alpha) \subset F$.
Pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = \lambda y$$

avec $y \in B(0_E, \alpha)$ et λ bien choisis
On a alors $y \in F$ puis $x \in F$ car F est un sous-espace vectoriel.
Ainsi $F = E$.

Exercice 4 : [énoncé]
Les ensembles

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, d/2) \text{ et } V = \bigcup_{b \in B} B(b, d/2)$$

avec $d = d(A, B)$ sont solutions.
En effet U et V sont des ouverts (par réunion d'ouverts) contenant A et B.
U et V sont disjoints car

$$U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists (a, b) \in A \times B, B(a, d/2) \cap B(b, d/2) \neq \emptyset \Rightarrow d(A, B) < d$$

Exercice 5 : [énoncé]
a) ($\Leftarrow$) ok
($\Rightarrow$) Si $d(x, F) = 0$ alors il existe $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to x$, or F est fermé, donc $x \in F$.
b) Soient

$$U = \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{2}d(x, G)\right) \text{ et } V = \bigcup_{x \in G} B\left(x, \frac{1}{2}d(x, F)\right)$$

Les parties U et V sont ouvertes car réunion de boules ouvertes et il est clair que U et V contiennent respectivement F et G.
S'il existe $y \in U \cap V$ alors il existe $a \in F$ et $b \in G$ tels que

$$d(a, y) < \frac{1}{2}d(a, G) \text{ et } d(b, y) < \frac{1}{2}d(b, F)$$

Puisque

$$d(a, G), d(b, F) \leqslant d(a, b)$$

on a donc

$$d(a, b) \leqslant d(a, y) + d(y, b) < d(a, b)$$

C'est absurde et on peut conclure

$$U \cap V = \emptyset$$

Exercice 6 : [énoncé]
A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \leqslant u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc $u \in A$.
B est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \underset{n\to\infty}{\to} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n^p| \leqslant \varepsilon/2$$

et donc
$$|u_n| \leqslant |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leqslant \varepsilon$$
Ainsi $u \to 0$ et donc $u \in B$.
C est fermé. En effet si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p, la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \leqslant \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p$. $v^p \in B$ et $v^p \to u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.
D est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe une infinité de n tels que $|u_n^p| \leqslant \varepsilon/2$ et donc tels que
$$|u_n| \leqslant |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leqslant \varepsilon$$
Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.
E n'est pas fermé. Notons δ^p, la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore.
Posons alors
$$u^p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}\delta^k$$
qui est élément de E. La suite u^p converge car
$$\left\|u^{p+q} - u^p\right\|_\infty \leqslant \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^p} \to 0$$
et la limite u de cette suite n'est pas périodique car
$$u_0 = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} = 1$$
et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : [énoncé]
a) Les éléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sont bornés donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
L'appartenance de l'élément nul et la stabilité par combinaison linéaire sont immédiates.
b) Si $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est ouvert alors puisque $0 \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ il existe $\alpha > 0$ tel que $B_\infty(0, \alpha) \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.
Or la suite constante égale à $\alpha/2$ appartient à $B_\infty(0, \alpha)$ et n'est pas nulle à partir d'un certain rang donc $B_\infty(0, \alpha) \not\subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas ouvert.
c) Pour $N \in \mathbb{N}$, posons u^N définie par $u_n^N = \frac{1}{n+1}$ si $n \leqslant N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $(u^N) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $u^N \to u$ avec u donné par $u_n = \frac{1}{n+1}$. En effet
$$\left\|u^N - u\right\|_\infty = \frac{1}{N+2} \to 0$$
Mais $u \notin \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas fermé.

Exercice 8 : [énoncé]
L'implication directe est immédiate. Inversement, supposons f_1 et f_2 continue.
Soit $a \in E$.
Si $a \in E_1 \cap E_2$ alors la continuité de f_1 et de f_2 donne
$$f(x) \xrightarrow[x\to a, x\in E_1]{} f(a)$$
et
$$f(x) \xrightarrow[x\to a, x\in E_2]{} f(a)$$
donc
$$f(x) \xrightarrow[x\to a, x\in E]{} f(a)$$
Si $a \in E_1 \backslash E_2$ alors il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset C_E E_2$ et donc $B(a, \alpha) \subset E_1$.
Puisque f coïncide avec la fonction continue f_1 sur un voisinage de a, on peut conclure que f est continue en a.
Le raisonnement est semblable si $a \in E_2 \backslash E_1$ et tous les cas ont été traités car $E = E_1 \cup E_2$.

Exercice 9 : [énoncé]
a)
$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|x - a\|^2 + \frac{1}{4}\|x - b\|^2 + \frac{1}{2}(x - a \mid x - b) \leqslant \|x - a\|^2$$
De plus s'il y a égalité, $x - a$ et $x - b$ sont colinéaires et ont même sens, or ces vecteurs ont même norme, ils sont dès lors égaux ce qui est exclu puisque $a \neq b$.
b) Cas F borné (donc compact).
Il existe $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que
$$\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{y\in F} \|x - y\|$$

Pour a valeur d'adhérence de (y_n), on a par passage à la limite

$$\|x-a\| = \inf_{y\in F} \|x-y\|$$

Cas général. Posons $d = \inf_{y\in F} \|x-y\|$ et $F' = F \cap \overline{B}(x, d+1)$.
F' est fermé et borné donc il existe $a \in F'$ tel que $\|x-a\| = \inf_{y\in F'} \|x-y\|$.
Or par double inégalité $\inf_{y\in F'} \|x-y\| = \inf_{y\in F} \|x-y\|$ et $a \in F$ donc il existe $a \in F$ tel que voulu.
c) L'existence est assuré par b. Pour l'unicité, supposons par l'absurde l'existence de $a \neq b$ solutions.
Par a), on a

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x-a\|$$

avec $\frac{a+b}{2} \in A$ car A convexe. Cela contredit la définition de a.
d)

$$\|x-y\|^2 = \|x-a\|^2 + 2(x-a \mid a-y) + \|a-y\|^2 \geqslant \|x-a\|^2$$

avec $a \in A$ donc $a = P(x)$.
e)

$$\|x-(ty+(1-t)P(x))\|^2 = \|x-P(x)-t(y-P(x))\|^2$$
$$= \|x-P(x)\| - 2t(x-P(x) \mid y-P(x)) + t^2\|y-P(x)\|^2$$

or

$$-2t(x-P(x) \mid y-P(x)) + t^2\|y-P(x)\|^2 \underset{t\to 0}{\sim} -2t(x-P(x) \mid y-P(x))$$

est strictement négatif au voisinage de zéro.
Pour t suffisamment petit, $ty+(1-t)P(x)$ est un vecteur du convexe A contredisant la définition de a.
f) Par d), on a $\Leftarrow$. Par e., on a $\Rightarrow$ via contraposée.
g)

$$(x-y \mid P(x)-P(y)) = (x-P(x) \mid P(x)-P(y))$$
$$+\|P(x)-P(y)\|^2 + (P(y)-y \mid P(x)-P(y))$$

avec

$$(x-P(x) \mid P(x)-P(y)) = -(x-P(x) \mid P(y)-P(x)) \geqslant 0$$

et

$$(P(y)-y \mid P(x)-P(y)) = -(y-P(y) \mid P(x)-P(y)) \geqslant 0$$

donc

$$(x-y \mid P(x)-P(y)) \geqslant \|P(x)-P(y)\|^2$$

Par Cauchy-Schwarz

$$\|P(x)-P(y)\|^2 \leqslant \|x-y\| \, \|P(x)-P(y)\|$$

Pour $P(x) \neq P(y)$, $\|P(x)-P(y)\| \leqslant \|x-y\|$ et pour $P(x) = P(y)$ aussi.
P est donc continue car lipschitzienne.

Exercice 10 : [énoncé]
Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $y \in A$ tel que $|x-y| = d(x,A)$. Or $d(x,A) = 0$ donc $x = y \in A$. Ainsi A est fermé.
Par l'absurde supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existe $a < c < b$ tel que $a, b \in A$ et $c \notin A$.
Posons $\alpha = \sup\{x \in A / x \leqslant c\}$ et $\beta = \inf\{x \in A / x \geqslant c\}$. On a $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < c < \beta$ et $]\alpha, \beta[\subset C_{\mathbb{R}}A$.
Posons alors $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. On a $d(\gamma, A) = \frac{\beta-\alpha}{2} = |\gamma-\alpha| = |\gamma-\beta|$ ce qui contredit l'hypothèse d'unicité. Absurde.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Notons C l'espace des suites convergentes de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
Soit (u^n) une suite convergente d'éléments de C de limite u^∞.
Pour chaque n, posons $\ell^n = \lim u^n = \lim_{p\to+\infty} u_p^n$.
Par le théorème de la double limite appliquée à la suite des fonctions u^n, on peut affirmer que la suite (ℓ^n) converge et que la suite u^∞ converge vers la limite de (ℓ^n). En particulier $u^\infty \in C$.
b) Notons A l'espace des suites dont le terme général est terme général d'une série absolument convergente.
Soit (u^n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}$$

La suite (u^n) est une suite d'éléments de A et une étude en norme $\|\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \to u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de A, la partie A n'est pas fermée.

Exercice 12 : [énoncé]
a) Par définition de l'ensemble E, l'application $\|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|a+b\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n+b_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n|+|b_n|) = \|a\|+\|b\|$$

avec convergence des séries écrites, et

$$\|\lambda.a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|\,|a_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = |\lambda|\,\|a\|$$

Enfin, si $\|a\| = 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant \|a\| = 0$$

donne $(a_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0}$
b) Considérons la forme linéaire

$$\varphi : (a_n)_{n\geqslant 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

On vérifie

$$\forall a = (a_n)_{n\geqslant 0} \in E, |\varphi(a)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \|a\|$$

La forme linéaire φ est donc continue.
Puisque $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ avec $\{1\}$, la partie F est fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue..
Posons $e = (1, 0, 0, \ldots)$ et un élément de F et

$$\forall \alpha > 0,\ e + \alpha e \notin F \text{ et } \|e - (e + \alpha e)\| = \alpha$$

On en déduit que F n'est pas un voisinage de son élément e et par conséquent la partie F n'est pas ouverte.
Posons $\alpha^p = e + p.(1, -1, 0, 0, \ldots)$.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \alpha^p \in F \text{ et } \|\alpha^p\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

La partie F n'est donc pas bornée.

Exercice 13 : [énoncé]
Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer $F + \text{Vect}(u)$ fermé pour tout $u \notin F$.
Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de $F + \text{Vect}(u)$ de limite x.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $x_n = y_n + \lambda_n u$ avec $y_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$.
Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite (λ_n) est bornée.
Si la suite (λ_n) n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer $|\lambda_n| \to +\infty$.
Posons alors $z_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n + u$.
Puisque $\|x_n\| \to \|x\|$ et $|\lambda_n| \to +\infty$, on a $\|z_n\| \to 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n} y_n \to -u$.
Or la suite de terme général $\frac{1}{\lambda_n} y_n$ est une suite d'éléments de l'espace fermé F, donc $-u \in F$ ce qui exclu.
Ainsi la suite (λ_n) est bornée et on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(n)})$ de limite $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par opérations, la suite $(y_{\varphi(n)})$ est alors convergente.
En notant y sa limite, on a $y \in F$ car l'espace F est fermé.
En passant la relation $x_n = y_n + \lambda_n u$ à la limite on obtient
$x = y + \lambda u \in F + \text{Vect}(u)$.
Ainsi l'espace $F + \text{Vect}(u)$ est fermé.

Exercice 14 : [énoncé]
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
Soit (A_p) une suite convergente de matrices semblables à A.
Notons A_∞ la limite de (A_p).
Si P est un polynôme annulateur de A, P est annulateur des A_p et donc P annule A_∞. Puisque A est supposée diagonalisable, il existe un polynôme scindé simple annulant A et donc A_∞ et par suite A_∞ est diagonalisable.
De plus $\chi_A = \chi_{A_p}$ donc à la limite $\chi_A = \chi_{A_\infty}$.
On en déduit que A et A_∞ ont les mêmes valeurs propres et que celles-ci ont mêmes multiplicités. On en conclut que A et A_∞ sont semblables.
Ainsi la classe de similitude de A est fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
A titre d'exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$P_p^{-1} A P_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \lambda I_2$$

qui n'est pas semblable à A.
De façon plus générale, si la matrice A n'est pas diagonalisable, il existe une valeur propre λ pour laquelle

$$\ker(A - \lambda I_2)^2 \neq \ker(A - \lambda I_2)$$

Pour $X_2 \in \ker(A - \lambda I_2)^2 \setminus \ker(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$. En complétant la famille libre (X_1, X_2)

en une base, on obtient que la matrice A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (\star) \\ 0 & \lambda & (\star) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, \dots, 1)$, on obtient

$$P_p^{-1} T P_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & (\star/p) \\ 0 & \lambda & (\star) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ 0 & \lambda & (\star) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

Or cette matrice n'est pas semblable à T ni à A car $\operatorname{rg}(A_\infty - \lambda I_n) \neq \operatorname{rg}(T - \lambda I_n)$.
Ainsi, il existe une suite de matrices semblables à A qui converge vers une matrice qui n'est pas semblable à A, la classe de similitude de A n'est pas fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ alors toute limite A_∞ d'une suite de la classe de similitude de A est semblable à A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = A_\infty$. On a alors $AP = PA_\infty$. En introduisant les parties réelles et imaginaires de P, on peut écrire $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'identité $AP = PA_\infty$ avec A et A_∞ réelles entraîne $AQ = QA_\infty$ et $AR = RA_\infty$.
Puisque la fonction polynôme $t \mapsto \det(Q + tR)$ n'est pas nulle (car non nulle en i), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P' = Q + tR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et pour cette matrice $AP' = P'A_\infty$.
Ainsi les matrices A et A_∞ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Il existe une valeur propre complexe λ pour laquelle $\ker(A - \lambda I_2)^2 \neq \ker(A - \lambda I_2)$.
Pour $X_2 \in \ker(A - \lambda I_2)^2 \backslash \ker(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, il suffit de reprendre la démonstration qui précède.
Si $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, on peut écrire $\lambda = a + ib$ avec $b \in \mathbb{R}^\star$.
Posons $X_3 = \bar{X}_1$ et $X_4 = \bar{X}_2$.
La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre car $\lambda \neq \bar{\lambda}$.
Introduisons ensuite $Y_1 = \operatorname{Re}(X_1)$, $Y_2 = \operatorname{Re}(X_2)$, $Y_3 = \operatorname{Im}(X_1)$ et $Y_4 = \operatorname{Im}(X_2)$.
Puisque $\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(Y_1, \dots, Y_4) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(X_1, \dots, X_4)$, la famille $(Y_1, \dots, Y_4)$ est libre et peut donc être complétée en une base.
On vérifie par le calcul $AY_1 = aY_1 - bY_3$, $AY_2 = aY_2 - bY_4 + Y_1 AY_3 = aY_3 + bY_1$ et $AY_4 = bY_2 + aY_4 + Y_3$.
et on obtient que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} T & \star \\ O & B \end{pmatrix}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, p, 1, \dots 1)$, on obtient

$$P_p^{-1} T P_p \to \begin{pmatrix} T_\infty & \star' \\ O & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

avec

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Or dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A_∞ est semblable est à $\operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}, B)$ qui n'est pas semblable à A pour des raisons de dimensions analogues à ce qui a déjà été vu.
Les matrices réelles A et A_∞ ne sont pas semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni a fortiori dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que la classe de similitude de A n'est pas fermée

Exercice 15 : [énoncé]
a) Soient (f_n) une suite convergente d'éléments de A et $f_\infty \in E$ sa limite.
Puisque la convergence de la suite (f_n) a lieu pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$, cette convergence correspond à la convergence uniforme. En particulier, il y a convergence simple et

$$f_n(0) \to f_\infty(0)$$

On en déduit $f_\infty(0) = 0$.
Puisqu'il y a convergence uniforme de cette suite de fonctions continues, on a aussi

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$$

Ainsi $f_\infty \in A$ et la partie A est donc fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.
b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in A$ vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Puisque

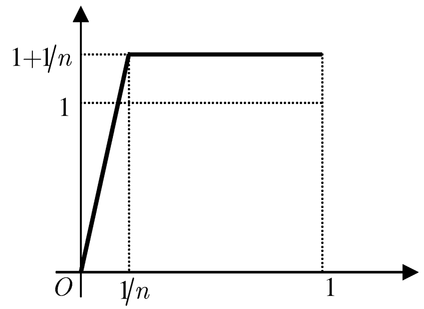
$$\left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \leqslant 1$$

on peut affirmer que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

et donc
$$\int_0^1 (1-f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$
Or la fonction $t \mapsto 1-f(t)$ est continue et positive, c'est donc la fonction nulle.
Par suite f est la fonction constante égale à 1, or $f(0)=0$, c'est absurde.

Exercice 16 : [énoncé]
a) Soient (f_n) une suite convergente d'éléments de A et $f_\infty \in E$ sa limite.
Puisque la convergence de la suite (f_n) a lieu pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$, il s'agit d'une convergence uniforme.
Puisqu'il y a convergence uniforme, il y a convergence simple et en particulier
$$f_n(0) \to f_\infty(0)$$
On en déduit $f_\infty(0)=0$.
Puisqu'il y a convergence uniforme de cette suite de fonctions continues, on a aussi
$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t$$
et donc $\int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$.
Ainsi $f_\infty \in A$ et la partie A est donc fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.
b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in A$ vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Puisque
$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \leqslant 1$$
on peut affirmer que
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$
et donc
$$\int_0^1 (1-f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$
Or la fonction $t \mapsto 1-f(t)$ est continue et positive, c'est donc la fonction nulle.
Par suite f est la fonction constante égale à 1, or $f(0)=0$, c'est absurde.
c) $d(\tilde{0},A) = \inf_{f\in A} \|f\|_\infty$ et par ce qui précède on a déjà $d(\tilde{0},A) \geqslant 1$.
Considérons maintenant la fonction f_n définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par le schéma.



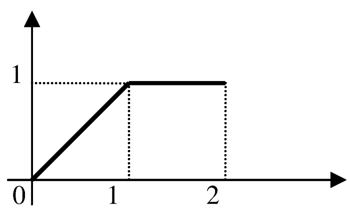
La fonction f_n

La fonction f_n est continue, $f_n(0)=0$ et par calcul d'aires
$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\frac{n+1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{n+1}{n} = \frac{(2n-1)(n+1)}{2n^2} = \frac{2n^2+n-1}{2n^2} \geqslant 1$$
Ainsi la fonction f_n est élément de A. Or
$$\|f_n\|_\infty = \frac{n+1}{n} \to 1$$
donc
$$d(\tilde{0},A) = 1$$

Exercice 17 : [énoncé]
a) Soit (u_n) une suite convergente d'élément de A de limite $u_\infty = (x_\infty, y_\infty)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n y_n = 1$. A la limite on obtient $x_\infty y_\infty = 1$ et donc $u_\infty = 1$.
En vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées, on peut affirmer que A est fermée.
La partie B, quant à elle, est fermée car produit cartésien de deux fermées.
b) Posons
$$u_n = (1/n, 0) = (1/n, n) + (0, -n) \in A+B$$
Quand $n \to +\infty$, $u_n \to (0,0)$.
Or $(0,0) \notin A+B$ car le premier élément d'un couple appartenant à $A+B$ ne peut pas être nul.

Exercice 18 : [énoncé]
a) On a
$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$$
Puisque $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ est une réunion d'ouverts, c'est un ouvert.
b) Soit (x_n) une suite convergente d'entiers de limite ℓ.
Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, |x_n - \ell| < 1/2$$
et alors
$$\forall m, n \geqslant N, |x_m - x_n| < 1$$
Puisque les termes de la suite (x_n) sont entiers, on en déduit
$$\forall m, n \geqslant N, x_m = x_n$$
La suite (x_n) est alors constante à partir du rang N et sa limite est donc un nombre entier.
c) Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.
La fonction f est continue et
$$\mathbb{Z} = f^{-1}(\{0\})$$
avec $\{0\}$ partie fermée de $\mathbb{R}$.

Exercice 19 : [énoncé]
Posons $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(P) = P(0)$.
L'application φ est linéaire et puisque $|\varphi(P)| \leqslant N_1(P)$, cette application est continue. On en déduit que $\Omega = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un ouvert relatif à E i.e. un ouvert de E pour la norme N_1.
Pour la norme N_2, montrons que la partie Ω n'est pas ouverte en observant qu'elle n'est pas voisinage de son point $P = 1$. Pour cela considérons la fonction continue $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ donnée par le graphe suivant :



Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant
$$\sup_{t\in[0,2]} |P_n(t) - f(t)| \to 0$$
et en particulier
$$P_n(0) \to 0 \text{ et } N_2(P_n - P) \to 0$$
Considérons alors la suite de polynômes (Q_n) avec
$$Q_n = P_n - P_n(0)$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0) = 0$ donc $Q_n \notin \Omega$ et
$$N_2(Q_n) \leqslant N_2(P_n - P) + |P_n(0)| \to 0$$
donc
$$Q_n \xrightarrow{N_2} P$$
Puisque la partie Ω n'est pas voisinage de chacun de ses points, elle n'est pas ouverte pour la norme N_2.

Exercice 20 : [énoncé]
Supposons $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ et introduisons $x \in \overset{\circ}{F}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset F$. Pour tout $u \in E$ tel que $u \neq 0_E$, considérons
$$y = x + \frac{\varepsilon}{2}\frac{u}{\|u\|}$$
on a $y \in B(x, \varepsilon)$ donc $y \in F$, or $x \in F$ donc $u \in F$. Ainsi $E \subset F$ puis $E = F$.

Exercice 21 : [énoncé]
a) Si a est intérieur à A alors A est voisinage de a et donc B aussi. Par suite $a \in B^\circ$.
Si a est adhérent à A alors a est limite d'une suite convergente d'éléments de A. Celle-ci est aussi une suite convergente d'éléments de B donc $a \in \bar{B}$. On peut aussi déduire ce résultat du précédent par un passage au complémentaire.
b) $A \cap B \subset A, B$ donc $(A \cap B)^\circ$ est inclus dans $A^\circ \cap B^\circ$. Inversement si a un élément de $A^\circ \cap B^\circ$, alors A est voisinage de a et B aussi donc $A \cap B$ est voisinage de a et donc a est intérieur à $A \cap B$. Ainsi $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ sont égaux.
$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc $A^\circ \cup B^\circ$ est inclus dans $(A \cup B)^\circ$. L'égalité n'est pas toujours vraie. Un contre-exemple est obtenu pour $A =]0, 1]$ et $B = [1, 2[$ où $A^\circ \cup B^\circ =]0, 1[\cup]1, 2[$ alors que $(A \cup B)^\circ =]0, 2[$.

c) Par passage au complémentaire des résultats précédents : $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ sont égaux alors que $\bar{A} \cap \bar{B}$ est inclus $\overline{A \cap B}$ sans pouvoir dire mieux. On peut aussi mener une résolution directe en exploitant a) et la caractérisation séquentielle des points adhérents pour l'inclusion de $\overline{A \cup B}$ dans $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice 22 : [énoncé]
$\bar{F} \subset E$ et $0_E \in \bar{F}$ car $0_E \in F$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \bar{F}$.
Il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F vérifiant

$$x_n \to x \text{ et } y_n \to y$$

On a alors

$$\lambda x_n + \mu y_n \to \lambda x + \mu y$$

avec $\lambda x_n + \mu y_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit $\lambda x + \mu y \in \bar{F}$.

Exercice 23 : [énoncé]
Puisque $A \subset \text{Vect} A$, on a $\bar{A} \subset \overline{\text{Vect} A}$.
Puisque $\text{Vect} A$ est un sous-espace vectoriel, on montrer aisément que $\overline{\text{Vect} A}$ l'est aussi. Puisqu'il contient $\bar{A}$, on obtient

$$\text{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\text{Vect} A}$$

Exercice 24 : [énoncé]
On a

$$\text{Fr}(A) = \bar{A} \backslash \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap C_E \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$$

On en déduit que $\text{Fr}(A)$ est fermée par intersection de parties fermées

Exercice 25 : [énoncé]
On sait

$$\text{Fr}(F) = \bar{F} \cap \overline{C_E F}$$

donc

$$\text{Fr}(\text{Fr}(F)) = \text{Fr}(F) \cap \overline{C_E \text{Fr}(F)}$$

Or $\text{Fr}(F) \subset \bar{F} = F$ donc $C_E F \subset C_E \text{Fr}(F)$ puis $\overline{C_E F} \subset \overline{C_E \text{Fr} F}$.
De plus $\text{Fr} F \subset \overline{C_E F}$ donc $\text{Fr} F \subset \overline{C_E \text{Fr} F}$ puis

$$\text{Fr}(\text{Fr}(F)) = \text{Fr}(F)$$

Exercice 26 : [énoncé]
a) Soit $x \in A \cap \bar{B}$. Il existe une suite $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \to x$. Or $x \in A$ et A est ouvert donc à partir d'un certain rang $b_n \in A$. Ainsi pour n assez grand $b_n \in A \cap B$ et puisque $b_n \to x$, $x \in \overline{A \cap B}$.
b) Si $A \cap B = \emptyset$ alors $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$.

Exercice 27 : [énoncé]
a) Soient $a, b \in \bar{A}$. Il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \to a$ et $b_n \to b$. Pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda a + (1-\lambda) b = \lim_{n \to +\infty} (\lambda a_n + (1-\lambda) b_n)$$

avec $\lambda a_n + (1-\lambda) b_n \in [a_n, b_n] \subset A$ donc $\lambda a + (1-\lambda) b \in \bar{A}$.
b) Soient $a, b \in A^\circ$. Il existe $\alpha_a, \alpha_b > 0$ tel que $B(a, \alpha_a), B(b, \alpha_b) \subset A$. Posons $\alpha = \min(\alpha_a, \alpha_b) > 0$.
Pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $x \in B(\lambda a + (1-\lambda) b, \alpha)$ on a $x = (\lambda a + (1-\lambda) b) + \alpha u$ avec $u \in B(0,1)$.
$a' = a + \alpha u \in B(a, \alpha) \subset A$ et $b' = b + \alpha u \in B(b, \alpha) \subset A$ donc $[a', b'] \subset A$ puisque A est convexe donc $\lambda a' + (1-\lambda) b' = x \in A$. Ainsi $B(\lambda a + (1-\lambda) b, \alpha) \subset A$ et donc $\lambda a + (1-\lambda) b \in A^\circ$. Finalement A° est convexe.

Exercice 28 : [énoncé]
$A \subset \bar{A}$, $B \subset \bar{B}$ donc $d(\bar{A}, \bar{B}) \leqslant d(A, B)$.
Pour tout $x \in \bar{A}$ et $y \in \bar{B}$, il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \to x$ et $b_n \to y$.
On a alors $d(x, y) = \lim\limits_{n \to +\infty} d(a_n, b_n)$ or $d(a_n, b_n) \geqslant d(A, B)$ donc à la limite $d(x, y) \geqslant d(A, B)$ puis $d(\bar{A}, \bar{B}) \geqslant d(A, B)$ et finalement l'égalité.

Exercice 29 : [énoncé]
a) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ est un fermé qui contient $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ donc $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $A_j \subset \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$ et $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$ est fermé donc $\overline{A_j} \subset \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$ puis $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$.
b) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ est un fermé qui contient $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ donc $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.
Il ne peut y avoir égalité : pour $A_1 = \mathbb{Q}$, $A_2 = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ on a $\overline{A_1 \cap A_2} = \emptyset$ et $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \mathbb{R}$.

Exercice 30 : [énoncé]
Pour tout $x \in A$, $x \in \bar{A}$ et donc $|f(x)| \leqslant \|f\|_{\infty,\bar{A}}$. Ainsi

$$\|f\|_{\infty,A} \leqslant \|f\|_{\infty,\bar{A}}$$

Soit $x \in \bar{A}$, il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to x$ et alors $f(u_n) \to f(x)$ par continuité de f. Or $|f(u_n)| \leqslant \|f\|_{\infty,A}$ donc à la limite $|f(x)| \leqslant \|f\|_{\infty,A}$ puis

$$\|f\|_{\infty,\bar{A}} \leqslant \|f\|_{\infty,A}$$

Exercice 31 : [énoncé]
Commençons par montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, on peut donc écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$. Posons alors pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_p = P(T + D_p)P^{-1}$ avec $D_p = \mathrm{diag}(1/p, 2/p, \dots, n/p)$.
Par opérations, $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$ et pour p assez grand les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire $T + D_p$ sont deux à deux distincts, ce qui assure $A_p \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Ainsi $A \in \overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})}$ et donc $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrons maintenant que l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est formée des matrices possédant exactement n valeurs propres distinctes.
Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
Cas $|\mathrm{Sp}A| < n$.
On peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
Posons alors $D_p = D + \begin{pmatrix} 0 & 1/p & & \\ 0 & 0 & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 0 \end{pmatrix}$ et $A_p = PD_pP^{-1}$.
La matrice D_p n'est pas diagonalisable car $\dim E_\lambda(D_p) < m_\lambda(D_p)$ donc A_p non plus et puisque$A_p \to A$, on peut affirmer que la matrice A n'est pas intérieure à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
Cas $|\mathrm{Sp}A| = n$.
Supposons par l'absurde que A n'est pas intérieur à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Il existe donc une suite (A_p) de matrices non diagonalisables convergeant vers A. Puisque les matrices A_p ne sont pas diagonalisables, leurs valeurs propres ne peuvent être deux à deux distinctes. Notons λ_p une valeur propre au moins double de A_p. Puisque $A_p \to A$, par continuité du déterminant $\chi_{A_p} \to \chi_A$. Les coefficients du polynôme caractéristique χ_{A_p} sont donc bornés ce qui permet d'affirmer que les racines de χ_{A_p} le sont aussi (car si ξ est racine de $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, on a $|\xi| \leqslant \max(1, |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|)$). La suite complexe (λ_p) étant bornée, on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(p)})$ de limite λ. On a alors $A_p - \lambda_{\varphi(p)}I_n \to A - \lambda I_n$. Or les valeurs propres de A étant simples, on a $\dim\ker(A - \lambda I_n) \leqslant 1$ et donc $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant n - 1$. La matrice $A - \lambda I_n$ possède donc un déterminant extrait non nul d'ordre $n - 1$. Par continuité du déterminant, on peut affirmer que pour p assez grand $\mathrm{rg}(A_{\varphi(p)} - \lambda_{\varphi(p)}I_n) \geqslant n - 1$ et donc $\dim\ker(A_{\varphi(p)} - \lambda_{\varphi(p)}I_n) \leqslant 1$ ce qui contredit la multiplicité de la valeur propre $\lambda_{\varphi(p)}$. C'est absurde et on conclut que la matrice A est intérieure à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 32 : [énoncé]
a) Si A est fermée alors $\bar{A} = A$ donc $\mathrm{Fr}A = A \backslash A^\circ \subset A$.
Inversement, si $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A}\backslash A^\circ \subset A$ alors puisque $A^\circ \subset A$ on a $\bar{A} \subset A$.
En effet, pour $x \in \bar{A}$, si $x \in A^\circ$ alors $x \in A$ et sinon $x \in \mathrm{Fr}A$ et donc $x \in A$.
Puisque de plus $A \subset \bar{A}$, on en déduit $A = \bar{A}$ et donc $\bar{A}$ est fermé.
b) A est un ouvert si, et seulement si, C_EA est un fermé i.e. si, et seulement si, $\mathrm{Fr}(C_EA) \subset C_EA$.
Or $\mathrm{Fr}(C_EA) = \mathrm{Fr}A$ donc A est un ouvert si, et seulement si, $\mathrm{Fr}A \cap A = \emptyset$.

Exercice 33 : [énoncé]
a) Une matrice de $\mathcal{R}$ est annulée par un polynôme de la forme $X^n - 1$ dont les racines sont de module 1. Puisque les valeurs propres figurent parmi les racines des polynômes annulateurs

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$$

b) Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres comptées avec multiplicité λ, μ. Celles-ci sont déterminées comme les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \mathrm{tr}M \\ \lambda\mu = \det M \end{cases}$$

Pour alléger les notations, posons $p = (\mathrm{tr}M)/2$ et $q = \det M$. Les valeurs propres λ et μ sont les deux racines du polynôme

$$X^2 - pX + q$$

et en posant $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = p^2 - q$, ces racines sont

$$\lambda = p + \delta \text{ et } \mu = p - \delta$$

de sorte que

$$|\lambda|^2 = |p|^2 + |\delta|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{p}\delta) \text{ et } |\mu|^2 = |p|^2 + |\delta|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{p}\delta)$$

On en déduit que la fonction f qui à $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ associe le réel $\left(|\lambda|^2 - 1\right)^2 \left(|\mu|^2 - 1\right)^2$ s'exprime comme somme, produit et conjuguée des $\operatorname{tr} M$ et $\det M$ et c'est donc une fonction continue.
Puisque $\mathcal{U} = f^{-1}(\{0\})$ avec $\{0\}$ fermé, $\mathcal{U}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
c) Soit $M \in \mathcal{U}$. La matrice M est trigonalisable et donc il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_2^+(\mathbb{C})$ telle que

$$M = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix},\ |\lambda| = |\mu| = 1$$

On peut écrire $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ et $\mu = \mathrm{e}^{i\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, posons

$$\alpha_n = 2\pi \frac{[n\alpha/2\pi]}{n} \text{ et } \beta_n = 2\pi \frac{[n\beta/2\pi] + 1}{n}$$

et considérons la matrice

$$M_n = PT_nP^{-1} \text{ avec } T_n = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\alpha_n} & \nu \\ 0 & \mathrm{e}^{i\beta_n} \end{pmatrix}$$

Par construction,

$$\mathrm{e}^{i\alpha_n} \neq \mathrm{e}^{i\beta_n}$$

au moins pour n assez grand et ce même lorsque $\alpha = \beta$.
On en déduit que pour ces valeurs de n la matrice T_n est diagonalisable.
De plus, puisque

$$\left(\mathrm{e}^{i\alpha_n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{i\beta_n}\right)^n = 1$$

on a alors $T_n^n = I_2$ et donc $M_n \in \mathcal{R}$.
Enfin, on a évidemment $M_n \to M$.
d) $\mathcal{U}$ est un fermé contenant $\mathcal{R}$ donc $\bar{\mathcal{R}} \subset \mathcal{U}$ et par double inclusion $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{U}$.

Exercice 34 : [énoncé]
La fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - x^2 - y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $U = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^2$ car image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Or un ouvert relatif à $\mathbb{R}^2$ n'est autre qu'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 35 : [énoncé]
L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est polynomiale en les coefficients matriciels, elle est donc continue. Puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^\star$ par cette application continue, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 36 : [énoncé]
Par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(x, y) \text{ est libre } \Leftrightarrow |(x \mid y)| < \|x\| \, \|y\|$$

Considérons l'application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \|x\| \, \|y\| - (x \mid y)$$

L'ensemble $\left\{(x, y) \in E^2 / (x, y) \text{ libre}\right\} = f^{-1}\left(]0, +\infty[\right)$ est un ouvert car image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.

Exercice 37 : [énoncé]
Soit $A \in R_p$. La matrice A possède un déterminant extrait non nul d'ordre p. Par continuité du déterminant, au voisinage de A, toute matrice à ce même déterminant extrait non nul et est donc de rang supérieur à p. Ainsi la matrice A est intérieure à R_p.

Exercice 38 : [énoncé]
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons f continue et introduisons $A \subset E$. Tout élément y de $f(\bar{A})$ est l'image par f de la limite x d'une suite convergente (x_n) d'éléments de A. Or f étant continue, $f(x_n) \to y$ et donc y est limite d'une suite d'élément de $f(A)$. Ainsi $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons (ii) et introduisons $B \subset F$. Pour $A = f^{-1}(B)$, on a $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B}$ donc $\bar{A} \subset f^{-1}(\bar{B})$ c'est à dire

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons (iii) et introduisons $B \subset F$. On remarque la propriété $f^{-1}(C_F B) = C_E f^{-1}(B)$ et donc

$$f^{-1}(B^\circ) = f^{-1}(C_F \overline{(C_F B)}) = C_E f^{-1}(\overline{C_F B}) \subset C_E \overline{f^{-1}(C_F B)} = \left(C_E f^{-1}(C_F B)\right)^\circ = \left(f^{-1}(\right.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons (iv). Pour tout $a \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, $B(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de F dont

$$f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \subset \left(f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))\right)^\circ$$

Or $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ donc $a \in \left(f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))\right)^\circ$. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

Ainsi nous obtenons

$$\forall a \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E,\ x \in B(a, \alpha) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$$

ce qui correspond à la continuité de f.

Exercice 39 : [énoncé]
Si u est continue alors

$$A = \{x \in E / \|u(x)\| = 1\} = f^{-1}(\{1\})$$

est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $f = \|\,.\,\| \circ u$. La partie A est donc un fermé relatif à E, c'est donc une partie fermée.
Inversement, si u n'est pas continu alors l'application u n'est par bornée sur $\{x \in E / \|x\| = 1\}$. Cela permet de construire une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \|u(x_n)\| > n$$

En posant

$$y_n = \frac{1}{\|u(x_n)\|} x_n$$

on obtient une suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant $y_n \to 0$.
Or $0 \notin A$ donc la partie A n'est pas fermée.

Exercice 40 : [énoncé]
Si la forme linéaire est continue assurément son noyau est fermé car image réciproque du fermé $\{0\}$.
Inversement, supposons que φ est une forme linéaire discontinue.
Pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, il existe alors $x \in E$ tel que

$$|\varphi(x)| > k \|x\|$$

En prenant $k = n \in \mathbb{N}$, on définit ainsi une suite (x_n) d'éléments de E vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi(x_n)| > n \|x_n\|$$

Posons alors

$$y_n = \frac{1}{\varphi(x_n)} x_n$$

On a par construction $\varphi(y_n) = 1$ et $\|y_n\| \leqslant 1/n$ donc $y_n \to 0_E$.
Considérons enfin

$$z_n = y_0 - y_n$$

On a $\varphi(z_n) = 0$ et donc $z_n \in \ker \varphi$. Or

$$z_n \to y_0$$

avec $y_0 \notin \ker \varphi$. Ainsi $\ker \varphi$ n'est pas fermé car ne contient pas toutes les limites de ses suites convergentes.

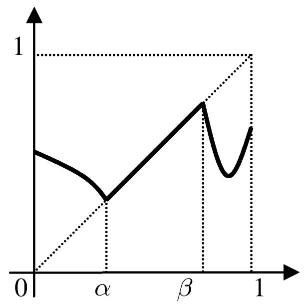
Exercice 41 : [énoncé]
a) Notons

$$A = \{x \in [0,1] / f(x) = x\}$$

On a évidemment $A \subset \mathrm{Im} f$, mais inversement, pour $x \in \mathrm{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x$$

Ainsi $\mathrm{Im} f \subset A$, puis, par double inclusion, $A = \mathrm{Im} f$.
On en déduit que A est un segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha, \beta]$ car image d'un compact par une fonction réelle continue.
b) Une fonction f d'allure suivante convient



c) Soit f solution dérivable.
Si $\alpha = \beta$ alors f est constante égale à cette valeur commune.
Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha, \beta]$.
Par suite, si $\alpha > 0$, f prend des valeurs strictement inférieur à α ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$.
De même on obtient $\beta = 1$ et on conclut $f : x \in [0,1] \mapsto x$.

Exercice 42 : [énoncé]
a) Soit f solution. Formons

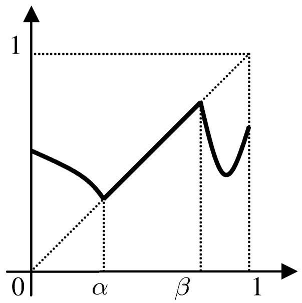
$$A = \{x \in [0,1] / f(x) = x\}$$

On a évidemment $A \subset \mathrm{Im} f$, mais inversement, pour $x \in \mathrm{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x$$

Ainsi $\mathrm{Im} f \subset A$, puis, par double inclusion, $A = \mathrm{Im} f$.
On en déduit que A est un segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha, \beta]$ car image d'un compact par une fonction réelle continue.

Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) = x$ et pour tout $x \in [0, \alpha[\cup]\beta, 1]$, $f(x) \in [\alpha, \beta]$.
Inversement, une fonction continue vérifiant les deux conditions précédente est solution.
Cela peut apparaître sous la forme d'une fonction ayant l'allure suivante



b) Soit f solution dérivable.
Si $\alpha = \beta$ alors f est constante égale à cette valeur commune.
Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha, \beta]$.
Par suite, si $\alpha > 0$, f prend des valeurs strictement inférieur à α ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$.
De même on obtient $\beta = 1$ et on conclut $f : x \in [0, 1] \mapsto x$.

Exercice 43 : [énoncé]
a) Par télescopage

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right) \circ (u - \mathrm{Id}) = u^{n+1} - \mathrm{Id}$$

donc

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id}) = \frac{1}{(n+1)}\left(u^{n+1} - \mathrm{Id}\right)$$

b) Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \ker(u - \mathrm{Id})$. On peut écrire $x = u(a) - a$ et on a $u(x) = x$.
On en déduit

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = x$$

Or

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(a) - a\right) \to 0$$

car

$$\left\|u^{n+1}(a) - a\right\| \leqslant \left\|u^{n+1}(a)\right\| + \|a\| \leqslant 2\|a\|$$

On en déduit $x = 0$.

c) Par la formule du rang

$$\dim \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) + \dim \ker(u - \mathrm{Id}) = \dim E$$

et puisque les deux espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires.
d) Soit $z \in E$. On peut écrire $z = x + y$ avec $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ et $y \in \ker(u - \mathrm{Id})$.
On a alors $v_n(z) = v_n(x) + y$ avec, comme dans l'étude du b), $v_n(x) \to 0$. On en déduit $v_n(z) \to y$.
Ainsi la suite de fonctions (v_n) converge simplement vers la projection p sur $\ker(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Puisque pour tout $x \in E$, on a

$$\|v_n(x)\| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\|u^k(x)\right\| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|x\| = \|x\|$$

on obtient à la limite $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. On en déduit que la projection p est continue puis que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \ker p$ est une partie fermée.
e) Supposons la convergence simple de la suite de fonctions (v_n) et la fermeture de $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Soit $z \in E$. Posons $y = \lim_{n\to+\infty} v_n(z)$ et $x = z - y$.
D'une part, puisque

$$u(v_n(z)) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^{k+1}(z) = v_n(z) + \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(z) - z\right)$$

on obtient à la limite

$$u(y) = y$$

car l'application linéaire u est continue et $\left\|u^{n+1}(z)\right\| \leqslant \|z\|$. On en déduit $y \in \ker(u - \mathrm{Id})$.
D'autre part

$$z - v_n(z) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{Id} - u^k)(z)\right)$$

et

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - u^k) = \mathrm{Im}\left((\mathrm{Id} - u) \circ \sum_{\ell=0}^{k-1} u^{\ell-1}\right) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - u) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$$

donc $z - v_n(z) \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. On en déduit $x = \lim(z - v_n(z)) \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ car $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est fermé.
Finalement, on a écrit $z = x + y$ avec

$$x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \text{ et } y \in \ker(u - \mathrm{Id})$$

Exercice 44 : [énoncé]
On note U l'ensemble des polynômes considérés.
Soit $P \in U$. En notant $x_1 < \ldots < x_n$ ses racines, on peut écrire

$$P = \lambda(X - x_1)\ldots(X - x_n)$$

avec $\lambda \neq 0$. Pour fixer les idées, supposons $\lambda > 0$ (il est facile d'adapter la démonstration qui suit au cas $\lambda < 0$)
Posons $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.
Posons aussi $y_0 \in \left]-\infty, x_1\right[$ et $y_n \in \left]x_n, +\infty\right[$.
$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}$,..., $P(y_{n-1})$ est du signe de (-1), $P(y_n)$ du signe de $+1$.
Considérons maintenant l'application

$$f_i : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(y_i)$$

L'application f_i est continue et donc $f_i^{-1}(\pm\mathbb{R}^{+\star})$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.
Considérons V l'intersection des

$$f_0^{-1}\left((-1)^n\mathbb{R}^{+\star}\right), f_1^{-1}\left((-1)^{n-1}\mathbb{R}^{+\star}\right), \ldots, f_n^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$$

Les éléments de V sont des polynômes réels alternant de signe entre $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $V \subset U$. Or $P \in V$ et V est ouvert donc V est voisinage de P puis U est voisinage de P.
Au final U est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.

Exercice 45 : [énoncé]
Soit $P \in O_n$. En notant $x_1 < \ldots < x_n$ ses racines, on peut écrire

$$P = \alpha(X - x_1)\ldots(X - x_n)$$

avec $\alpha \neq 0$.
Posons $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.
Posons aussi $y_0 \in \left]-\infty, x_1\right[$ et $y_n \in \left]x_n, +\infty\right[$.
$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n\alpha$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}\alpha$,..., $P(y_{n-1})$ est du signe de $(-1)\alpha$, $P(y_n)$ du signe de α. Pour simplifier l'exposé de ce qui suit, on va supposer $\alpha > 0$. La résolution se transposera aisément au cas $\alpha < 0$.
Considérons l'application

$$f_i : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(y_i)$$

L'application f_i est continue et donc $f_j^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$ et $f_j^{-1}(\mathbb{R}^{-\star})$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}_n[X]$.
Considérons U l'intersection des ouverts

$$f_0^{-1}\left((-1)^n\mathbb{R}^{+\star}\right), f_1^{-2}\left((-1)^{n-1}\mathbb{R}^{+\star}\right), \ldots, f_n^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$$

Les éléments de U sont des polynômes réels alternant de signe entre $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $U \subset O_n$. Or $P \in U$ et U est ouvert donc U est voisinage de P puis O_n est voisinage de P.
Au final O_n est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.
Dans le cas $n = 1$: $F_n = O_n$ et donc F_n est ouvert.
Dans le cas $n = 2$: F_n réunit les polynômes $P = aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac > 0$ (que a soit égal à 0 ou non). L'application $P \mapsto b^2 - 4ac$ étant continue, on peut affirmer que F_n est encore ouvert car image réciproque d'un ouvert pas une application continue.
Dans le cas $n \geqslant 3$: $P_n = X(1 + X^2/n)$ est une suite de polynômes non scindés convergeant vers X scindé à racines simples. Par suite F_n n'est pas ouvert.

Exercice 46 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons f discontinue en $a \in \mathbb{R}$. On peut alors construire une suite (x_n) vérifiant

$$x_n \to a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon$$

avec $\varepsilon > 0$ fixé.
Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $f([a, x_n])$ est un segment contenant $f(a)$ et $f(x_n)$, il contient aussi l'intermédiaire $f(a) \pm \varepsilon$ (le $\pm$ étant déterminé par la position relative de $f(x_n)$ par rapport à $f(a)$). Il existe donc a_n compris entre a et x_n vérifiant

$$|f(a_n) - f(a)| = \varepsilon$$

La suite (a_n) évolue dans le fermé $f^{-1}(\{f(a) + \varepsilon\}) \cup f^{-1}(\{f(a) - \varepsilon\})$ et converge vers a donc $a \in f^{-1}(\{f(a) + \varepsilon\}) \cup f^{-1}(\{f(a) - \varepsilon\})$ ce qui est absurde.

Exercice 47 : [énoncé]
Considérons l'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ déterminée par $\varphi(f) = f^2 - f$.
L'application φ est continue par opérations sur les fonctions continues, notamment parce que l'application $f \mapsto f \circ f$ est continue (elle s'obtient à partir du produit dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$).
Puisque $\left\{\tilde{0}\right\}$ est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble $\mathcal{P} = \varphi^{-1}\left(\left\{\tilde{0}\right\}\right)$ est un fermé relatif à $\mathcal{L}(E)$, donc un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 48 : [énoncé]
Notons $P_1, \dots, P_n$ les points à exclure.
Considérons une droite $\mathcal{D}$ ne passant par aucun des points $P_1, \dots, P_n$. Cette droite est une partie connexe.
Considérons un point A du plan autre que $P_1, \dots, P_n$. Il existe une infinité de droites passant par A et coupant la droite $\mathcal{D}$. Parmi celles-ci, il y en a au moins une qui ne passe par les $P_1, \dots, P_n$. On peut dont relier A à un point de la droite $\mathcal{D}$.
En transitant par cette droite, on peut alors relier par un tracé continu excluant les $P_1, \dots, P_n$, tout couple de points (A, B) autres que les $P_1, \dots, P_n$.

Exercice 49 : [énoncé]
Si les deux points à relier figurent dans un même connexe par arcs, le problème est résolu. Sinon, on transite par un point commun au deux connexes pour former un arc reliant ces deux points et inclus dans l'union.

Exercice 50 : [énoncé]
L'image d'un arc continu par une application continue est un arc continu. Ainsi si X est connexe par arcs et f continue définie sur X alors pour tout $f(x), f(y) \in f(X)$, l'image par f d'un arc continu reliant x et à y est un arc continue reliant $f(x)$ à $f(y)$ et donc $f(X)$ est connexe par arcs.

Exercice 51 : [énoncé]
a) A est une partie convexe donc connexe par arcs.
b) L'application δ est continue donc $\delta(A)$ est connexe par arcs c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Puisque f' prend des valeurs strictement positives et strictement négative, la fonction f n'est pas monotone et par conséquent des valeurs positives et négatives appartiennent à l'intervalle $\delta(A)$. Par conséquent $0 \in \delta(A)$.
c) Puisque $0 \in \delta(A)$, il existe $a < b \in I$ tels que $f(a) = f(b)$. On applique le théorème de Rolle sur $[a, b]$ avant de conclure.

Exercice 52 : [énoncé]
X est une partie connexe par arcs (car convexe) et φ est continue donc $\varphi(X)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle.
De plus $0 \notin \varphi(X)$ donc $\varphi(X) \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\varphi(X) \subset \mathbb{R}^{-\star}$ et on peut conclure.

Exercice 53 : [énoncé]
a) Soient $(a, b) \in A \times B$ et $(a', b') \in A \times B$. Par la connexité de A et B, il existe $\varphi : [0,1] \to A$ et $\psi : [0,1] \to B$ continues vérifiant $\varphi(0) = a, \varphi(1) = a'$ et $\psi(0) = b, \psi(1) = b'$. L'application $\theta : [0,1] \to A \times B$ définie par $\theta(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ est continue et vérifie $\theta(0) = (a, b)$ et $\theta(1) = (a', b')$. Ainsi $A \times B$ est connexe par arcs.
b) $A + B$ est l'image de $A \times B$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ vers E, $A + B$ est donc connexe par arcs.

Exercice 54 : [énoncé]
Il nous suffit d'étudier A.
Soient $a, a' \in A$. $A \subset A \cup B$ donc il existe $\varphi : [0,1] \to A \cup B$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = a'$.
Si φ ne prend pas de valeurs dans B alors φ reste dans A et résout notre problème.
Sinon posons $t_0 = \inf \{t \in [0,1] / \varphi(t) \in B\}$ et $t_1 = \sup \{t \in [0,1] / \varphi(t) \in B\}$. φ étant continue et A, B fermés,

$$\varphi(t_0), \varphi(t_1) \in A \cap B$$

$A \cap B$ étant connexe par arcs, il existe $\psi : [t_0, t_1] \to A \cap B$ continue tel que $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ et $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. En considérant $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0, t_1]$ et $\theta(t) = \varphi(t)$ sinon, on a $\theta : [0,1] \to A$ continue et $\theta(0) = a$, $\theta(1) = a'$.
Ainsi A est connexe par arcs.

Exercice 55 : [énoncé]
Soient $a, b \in S$.
Si $a \neq -b$. On peut alors affirmer que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)a + \lambda b \neq 0$.
L'application $\lambda \mapsto \frac{1}{\|(1-\lambda)a+\lambda b\|}((1-\lambda)a + \lambda b)$ est alors un chemin joignant a à b inscrit dans S.
Si $a = -b$, on transite par un point $c \neq a, b$ ce qui est possible car $n \geqslant 2$.

Exercice 56 : [énoncé]
a) Non. Si on introduit f forme linéaire non nulle telle que $H = \ker f$, f est continue et $f(E \backslash H) = \mathbb{R}^\star$ non connexe par arcs donc $E \backslash H$ ne peut l'être.
b) Oui. Introduisons une base de F notée $(e_1, \dots, e_p)$ que l'on complète en une base de E de la forme $(e_1, \dots, e_n)$.
Sans peine tout élément $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ de $E \backslash F$ peut être lié par un chemin continue dans $E \backslash F$ au vecteur e_n si $x_n > 0$ ou au vecteur $-e_n$ si $x_n < 0$ (prendre $x(t) = (1-t)x_1 e_1 + \dots + (1-t)x_{n-1}e_n + ((1-t)x_n + t)e_n$).

De plus, les vecteurs e_n et $-e_n$ peuvent être reliés par un chemin continue dans $E\backslash F$ en prenant $x(t) = (1-2t)e_n + (1-t^2)e_{n-1}$. Ainsi $E\backslash F$ est connexe par arcs.

Exercice 57 : [énoncé]
Notons $\mathcal{D}_n$ la partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étudiée et montrons que toute matrice de $\mathcal{D}_n$ peut-être reliée par un chemin continu inscrit dans $\mathcal{D}_n$ à la matrice I_n ce qui suffit pour pouvoir conclure.
Soit $A \in \mathcal{D}_n$. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale.
Considérons alors $\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\gamma(t) = PD(t)P^{-1}$ avec $D(t) = (1-t)D + tI_n$.
L'application γ est continue, à valeurs dans $\mathcal{D}_n$ avec $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = I_n$: elle résout notre problème.

Exercice 58 : [énoncé]
L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue et l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par celle-ci est $\mathbb{R}^\star$ qui n'est pas connexe par arcs donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne peut l'être.

Exercice 59 : [énoncé]
Pour montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, il suffit d'observer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être relier continûment dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à la matrice I_n.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP = (b_{i,j})$ soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
Nous allons construire un chemin continue joignant I_n à B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puis en déduire un chemin joignant I_n à A lui aussi dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Pour $i > j$, posons $m_{i,j}(t) = 0$.
Pour $i < j$, posons $m_{i,j}(t) = tb_{i,j}$ de sorte que $m_{i,j}(0) = 0$ et $m_{i,j}(1) = b_{i,j}$.
Pour $i = j$, on peut écrire $b_{i,i} = \rho_i \mathrm{e}^{i\theta_i}$ avec $\rho_i \neq 0$. Posons $m_{i,i}(t) = \rho_i^t \mathrm{e}^{it\theta_i}$ de sorte que $m_{i,i}(0) = 1$, $m_{i,i}(1) = b_{i,i}$ et

$$\forall t \in [0,1]\,,\, m_{i,i}(t) \neq 0$$

L'application $t \mapsto M(t) = (m_{i,j}(t))$ est continue, elle joint I_n à B et ses valeurs prises sont des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux non nuls, ce sont donc des matrices inversibles.
En considérant $t \mapsto PM(t)P^{-1}$, on dispose d'un chemin continu joignant I_n à A et restant inscrit dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
On peut donc conclure que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 60 : [énoncé]
a) La partie U est convexe donc connexe par arcs.
b) Par le théorème des accroissements finis, un taux de variation est un nombre dérivé et donc

$$\tau(U) \subset f'(I)$$

De plus, tout nombre dérivé est limite d'un taux de variation, donc

$$f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$$

c) Puisque l'application τ est continue sur U connexe par arcs, son image $\tau(U)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle. L'encadrement précédent assure alors aussi que $f'(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 61 : [énoncé]
On sait

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Par ce paramétrage, on peut affirmer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexes par arcs, car image continue de l'intervalle $\mathbb{R}$ par l'application

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Exercice 62 : [énoncé]
L'application $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est polynomiale non nulle en λ donc possède un nombre fini de racine.
Par suite : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \alpha > 0, B(A,\alpha) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Exercice 63 : [énoncé]
a) Soient $u, v \in \bar{F}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $(u_n), (v_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \to u$ et A.
Comme $\lambda u_n + \mu v_n \to \lambda u + \mu v$ et $\lambda u_n + \mu v_n \in F$ on a $\lambda u + \mu v \in \bar{F}$.
b) Soit H un hyperplan de E.
Si $\bar{H} = H$ alors H est fermé.
Sinon alors $\bar{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, contenant H et distinct de H.
Puisque H est un hyperplan $\exists a \notin H$ tel que $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$.
Soit $x \in \bar{H}\backslash H$. On peut écrire $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \neq 0$. Par opération $a \in \bar{H}$ et puisque $H \subset \bar{H}$ on obtient $E \subset \bar{H}$. Finalement $\bar{H} = E$ et donc H est dense.

Exercice 64 : [énoncé]
a) Pour tout $a \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap U \neq \emptyset$ car U est dense.
Soit $x \in B(a,\varepsilon) \cap U$. Puisque $B(a,\varepsilon) \cap U$ est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x,\alpha) \subset B(a,\varepsilon) \cap U$ et puisque V est dense $B(x,\alpha) \cap V \neq \emptyset$. Par suite

$$B(a,\varepsilon) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$$

b) Soient F et G deux fermés d'intérieurs vides.

$$C_E(F \cup G)^\circ = \overline{C_E(F \cup G)} = \overline{C_E F \cap C_E G}$$

avec $C_E F$ et $C_E G$ ouverts denses donc

$$\overline{C_E F \cap C_E G} = E$$

puis

$$(F \cup G)^\circ = \emptyset$$

Exercice 65 : [énoncé]
a) Posons

$$A = \{n \geqslant n_0 / a \geqslant u_n\}$$

A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $n_0 \in A$ et majorée car $u_n \to +\infty$.
La partie A admet donc un plus grand élément $n \geqslant n_0$ et pour celui-ci $u_n \leqslant a < u_{n+1}$.
Par suite $|u_n - a| = |u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$ car $n \geqslant n_0$.
b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Puisque $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$.
Puisque $v_n \to +\infty$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x + v_p \geqslant u_{n_0}$.
Par l'étude précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - (x + v_p)| \leqslant \varepsilon$ i.e. $|(u_n - v_p) - x| \leqslant \varepsilon$.
Par suite l'ensemble $\{u_n - v_p / n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
c) Remarquons que

$$A = \{\cos(\ln n)/n \in \mathbb{N}^\star\} = \{\cos\left(\ln(n+1) - 2p\pi\right)/n, p \in \mathbb{N}\}$$

Posons $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = 2n\pi$. Les hypothèses précédentes sont réunies et donc

$$B = \{u_n - v_p / n, p \in \mathbb{N}\} = \{\ln(n+1) - 2p\pi / n, p \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient $x \in [-1,1]$ et $\theta = \arccos x$.
Par densité, il existe une suite (θ_n) d'éléments de B convergeant vers θ et, par continuité de la fonction cosinus, la suite (x_n) de terme général $x_n = \cos(\theta_n)$ converge vers $x = \cos\theta$.
Or cette suite (x_n) est une suite d'éléments de $\cos(B) = A$ et donc A est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 66 : [énoncé]
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $1/n_0 \leqslant \varepsilon$.
Pour $a \geqslant \ln n_0$ et $n = E(\mathrm{e}^a) \geqslant n_0$, on a $\ln n \leqslant a \leqslant \ln(n+1)$.
On en déduit

$$|a - \ln n| \leqslant \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) \leqslant 1/n \leqslant 1/n_0 \leqslant \varepsilon$$

Puisque $m - x \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$, pour m assez grand, on a $a = m - x \geqslant \ln n_0$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $|a - \ln n| \leqslant \varepsilon$ i.e.

$$|m - \ln n - x| \leqslant \varepsilon$$

Par suite $\{m - \ln n / (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 67 : [énoncé]
a) Il existe $h \in H$ tel que $h \neq 0$ car H n'est pas réduit à $\{0\}$.
Si $h > 0$ alors $h \in \{x \in H / x > 0\}$. Si $h < 0$ alors $-h \in \{x \in H / x > 0\}$.
Dans les deux cas $\{x \in H / x > 0\} \neq \emptyset$. De plus $\{x \in H / x > 0\} \subset \mathbb{R}$ et $\{x \in H / x > 0\}$ est minoré par 0 donc $a = \inf\{x \in H / x > 0\}$ existe dans $\mathbb{R}$.
b) On suppose $a > 0$.
Si $a \notin H$ alors il existe $x, y \in H$ tel que $a < x < y < 2a$ et alors $y - x$ est élément de H et vérifie $0 < y - x < a$ ce qui contredit la définition de a. C'est absurde.
$a \in H$ donc $a\mathbb{Z} =< a > \subset H$.
Inversement, soit $x \in H$. On peut écrire $x = aq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$, $r \in [0, a[$ (en fait $q = E(x/a)$ et $r = x - aq$)
Puisque $r = x - aq$ avec $x \in H$ et $aq \in a\mathbb{Z} \subset H$ on a $r \in H$.
Si $r > 0$ alors $r \in \{x \in H / x > 0\}$ et $r < a$ contredit la définition de a.
Il reste $r = 0$ et donc $x = aq$. Ainsi $H \subset a\mathbb{Z}$ puis l'égalité.
c) Puisque $\inf\{x \in H / x > 0\} = 0$, on peut affirmer que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \alpha$.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Montrons $H \cap B(a,\alpha) \neq \emptyset$ i.e. $H \cap]a - \alpha, a + \alpha[\neq \emptyset$
Il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \alpha$. Posons $n = E(a/x)$. On a $a = nx + r$ avec $0 \leqslant r < \alpha$.

$nx \in < x > \subset H$ et $|a - nx| = r < \alpha$ donc $nx \in H \cap B(a, \alpha)$ et donc $H \cap B(a, \alpha) \neq \emptyset$.
Ainsi H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 68 : [énoncé]
a) $\{\cos(n)/n \in \mathbb{N}\} = \{\cos(n)/n \in \mathbb{Z}\} = \{\cos(n + 2k\pi)/n, k \in \mathbb{Z}\} = \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$
Puisque $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et c'est un sous-groupe dense car il n'est pas monogène puisque π n'est pas rationnel ; c'est en effet un résultat classique bien que en dehors du programme, les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont monogènes ou denses.
Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = x$ et puisque $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ convergeant vers θ. L'image de cette suite par la fonction continue cosinus détermine une suite d'élément de $\{\cos(n)/n \in \mathbb{N}\}$ convergeant vers x.
b) En notant que les 2^p avec $p \in \mathbb{N}$ sont des naturels non nuls, on observe

$$\{\cos(p\ln 2)/p \in \mathbb{N}\} \subset \{\cos(\ln n)/n \in \mathbb{N}^\star\}$$

Ainsi

$$\cos(\ln 2.\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}) \subset \{\cos(\ln n)/n \in \mathbb{N}^\star\}$$

Si π et $\ln 2$ ne sont pas commensurables, on peut conclure en adaptant la démarche précédente.
Si en revanche π et $\ln 2$ sont commensurables (ce qui est douteux...), on reprend l'idée précédente avec $\ln 3$ au lieu de $\ln 2$.
Assurément π et $\ln 3$ ne sont pas commensurables car s'ils l'étaient, $\ln 2$ et $\ln 3$ le seraient aussi ce qui signifie qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $p\ln 2 = q\ln 3$ soit encore $2^p = 3^q$ ce qui est faux !

Exercice 69 : [énoncé]
a) Soit u une suite sommable. On a

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \to 0$$

donc pour tout $\alpha > 0$, il existe N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| < \alpha$$

Considérons alors v définie par $v_n = u_n$ si $n \leqslant N$ et $v_n = 0$ sinon.
On a $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $\|v - u\|_1 < \alpha$ donc $B(u, \alpha) \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \neq \emptyset$.
b) Non, en notant u la suite constante égale à 1, $B_\infty(u, 1/2) \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \emptyset$.

Exercice 70 : [énoncé]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable donc il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = T$ avec T triangulaire supérieure. Posons alors $T_p = T + \mathrm{diag}(1/p, 2/p, \dots, n/p)$ et $A_p = PT_pP^{-1}$. Il est immédiat que $T_p \to T$ quand $p \to +\infty$ et donc $A_p \to A$. De plus, pour p assez grand, la matrice T_p est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux deux à deux distincts, cette matrice admet donc n valeurs propres et est donc diagonalisable. Il en est de même pour A_p qui lui est semblable. Ainsi toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Exercice 71 : [énoncé]
1ère méthode (nécessitant quelques résultats non triviaux mais intuitifs sur la codimension)
Par définition, un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de codimension 1. Son adhérence $\bar{H}$ est aussi un sous-espace vectoriel et, puisque contenant H, sa codimension vaut 0 ou 1.
Si $\bar{H}$ est de codimension 0 alors $\bar{H} = E$ ce qui signifie que H est dense dans E.
Si $\bar{H}$ est de codimension 1, puisque $\bar{H}$ contient l'hyperplan H, on a $\bar{H} = H$ et donc $\bar{H}$ est fermé.
2ème méthode (plus élémentaire)
Par définition un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de codimension 1. Il existe donc un vecteur $a \in E$ non nul vérifiant

$$H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$$

Supposons que H ne soit pas fermé. Il existe alors une suite (x_n) d'éléments de H convergeant vers un élément x n'appartenant pas à H. On peut écrire

$$x = h + \lambda a \text{ avec } h \in H \text{ et } \lambda \neq 0$$

En considérant

$$y_n = \frac{1}{\lambda}(x_n - h)$$

on construit une suite (y_n) d'éléments de H convergeant vers a.
Il est désormais facile d'établir que H est dense dans E. En effet pour $z \in E$, on peut écrire

$$z = k + \mu a$$

avec $k \in H$ et $\mu \in \mathbb{R}$ de sorte que la suite de terme général

$$z_n = k + \mu y_n$$

est une suite d'éléments de H convergeant vers z.

Exercice 72 : [énoncé]
Soit f une fonction élément de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A vérifiant

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

Considérons alors la fonction $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = 1$ pour $t \in [0,A]$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \geqslant A+1$ et $\varphi(t) = 1-(t-A)$ pour $t \in [A,A+1]$. La fonction $f\varphi$ est éléments de E_0 et

$$\|f - f\varphi\|_2 \leqslant \sqrt{\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi E_0 est dense dans E.
Pour montrer maintenant que F est dense dans E, nous allons établir que F est dense dans E_0.
Soit f une fonction élément de E_0. Remarquons

$$\int_0^{+\infty} \left(f(t) - P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)^2 \mathrm{d}t \underset{u=\mathrm{e}^{-t}}{=} \int_0^1 \left(f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2} - P(u)\right)^2 \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\mathrm{d}u$$

La fonction $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $\sqrt{u}\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.
La fonction $g : u \mapsto f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2}$ peut-être prolongée par continuité en 0 car f est nulle en dehors d'un segment. Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\|g - P\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon$ et pour $\varphi : t \mapsto P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}$ on a alors

$$\|f - \varphi\|_2 \leqslant \lambda\varepsilon \text{ avec } \lambda = \sqrt{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\,\mathrm{d}u}$$

Cela permet de conclure à la densité proposée.

Exercice 73 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $A \neq E$.
Il existe un élément $a \in E$ tel que $a \notin A$. Par translation du problème, on peut supposer $a = 0$.
Posons $n = \dim E$.
Si $\mathrm{Vect}(A)$ est de dimension strictement inférieure à n alors A est inclus dans un hyperplan de E et son adhérence aussi. C'est absurde car cela contredit la densité de A.
Si $\mathrm{Vect}(A)$ est de dimension n, on peut alors considérer $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E formée d'éléments de A.
Puisque $0 \notin A$, pour tout $x \in A$, on remarque : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^-, -\lambda x \notin A$ (car sinon, par convexité, $0 \in A$).
Par convexité de A : $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \geqslant 0, \lambda_1+\dots+\lambda_n = 1 \Rightarrow \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in A$
et donc : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^-, \forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \geqslant 0, \lambda_1+\dots+\lambda_n = 1 \Rightarrow \lambda(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \notin A$.
Ainsi $\forall \mu_1,\dots,\mu_n \leqslant 0, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \notin A$.
Or la partie $\{\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n / \mu_i < 0\}$ est un ouvert non vide de A et donc aucun de ses éléments n'est adhérent à A. Cela contredit la densité de A.

Exercice 74 : [énoncé]
Soient $a < b \in A$.
Puisque $a, b \in A$, $\frac{a+b}{2} \in A$, puis $\frac{3a+b}{4} = \frac{a+(a+b)/2}{2} \in A$ et $\frac{a+3b}{4} \in A$ etc.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons $\forall k \in \{0,\dots,2^n\}, \frac{ka+(2^n-k)b}{2^n} \in A$.
La propriété est immédiate pour $n = 0$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.
Soit $k \in \{0,\dots,2^{n+1}\}$.
Cas k pair :
$k = 2k'$ avec $k' \in \{0,\dots,2^n\}$ et $\frac{ka+(2^{n+1}-k)b}{2^{n+1}} = \frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n} \in A$ en vertu de l'hypothèse de récurrence.
Cas k impair :
$k = 2k'+1$ avec $k' \in \{0,\dots,2^n-1\}$ et

$$\frac{ka+(2^{n+1}-k)b}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n} + \frac{(k'+1)a+(2^n-(k'+1))b}{2^n}\right) \in A$$

car par hypothèse de récurrence

$$\frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n}, \frac{(k'+1)a+(2^n-(k'+1))b}{2^n} \in A$$

La récurrence est établie.
Soit $x \in]\inf A, \sup A[$.
Il existe $a, b \in A$ tel que $x \in [a,b]$ ce qui permet d'écrire $x = \lambda a + (1-\lambda)b$.
Soit $k_n = E(2^n\lambda)$ et $x_n = \frac{k_n a+(2^n-k_n)b}{2^n}$.
On vérifie aisément que $x_n \to x$ car $2^n k \to \lambda$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in A$
Ainsi A est dense dans $]\inf A, \sup A[$.

Exercice 75 : [énoncé]
Considérons l'ensemble $B = \ln A = \{\ln a / a \in A\}$.

Pour tout $x, y \in B$, $\frac{x+y}{2} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab} \in B$.
En raisonnant par récurrence, on montre que pour tout $x, y \in B$, on a la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, \frac{kx + (2^n - k)y}{2^n} \in B$$

Soit $x \in]\inf A, \sup A[$. Il existe $a, b \in A$ tels que $a < x < b$.
On a alors $\ln a < \ln x < \ln b$ avec $\ln a, \ln b \in B$.
On peut écrire $\ln x = \lambda \ln a + (1 - \lambda) \ln b$ avec $\lambda \in]0, 1[$.
Posons alors k_n la partie entière de $\lambda 2^n$ et $x_n = \exp\left(\frac{k_n}{2^n} \ln a + \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right) \ln b\right)$
Il est immédiat que $x_n \to x$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$.
Si, dans cette suite, il existe une infinité d'irrationnels, alors x est limite d'une suite d'éléments de $A \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.
Sinon, à partir d'un certain rang, les termes de la suite x_n sont tous rationnels.
Le rapport x_{n+1}/x_n est alors aussi rationnel ; mais

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n}} \text{ avec } \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = 0 \text{ ou } \frac{1}{2^{n+1}}$$

S'il existe une infinité de n tels que $\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ alors il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^n}} \in \mathbb{Q}$$

et puisque l'élévation au carré d'un rationnel est un rationnel, le nombre a/b est lui-même rationnel. Or les racines carrées itérés d'un rationnel différent de 1 sont irrationnelles à partir d'un certain rang.
Il y a absurdité et donc à parti d'un certain rang $k_{n+1} = 2k_n$.
Considérons à la suite (x'_n) définie par

$$x'_n = \exp\left(\frac{k'_n}{2^n} \ln a + \left(1 - \frac{k'_n}{2^n}\right) \ln b\right) \text{ avec } k'_n = k_n + 1$$

On obtient une suite d'éléments de A, convergeant vers x et qui, en vertu du raisonnement précédent, est formée d'irrationnels à partir d'un certain rang.

Exercice 76 : [énoncé]
$N_\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ est bien définie et on vérifie immédiatement

$$N_\varphi(\lambda f) = |\lambda| \, N_\varphi(f) \text{ et } N_\varphi(f + g) \leqslant N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$$

Il reste à étudier la véracité de l'implication

$$N_\varphi(f) = 0 \Rightarrow f = 0$$

Supposons : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ dense dans $[0, 1]$.
Si $N_\varphi(f) = 0$ alors $f\varphi = 0$ et donc pour tout $x \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$, on a $f(x) = 0$ car $\varphi(x) \neq 0$.
Puisque la fonction continue f est nulle sur la partie $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ dense dans $[0, 1]$, cette fonction est nulle sur $[0, 1]$.
Supposons : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ non dense dans $[0, 1]$.
Puisque le complémentaire de l'adhérence est l'intérieur du complémentaire, la partie $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur non vide et donc il existe $a < b \in [0, 1]$ tels que $[a, b] \subset \varphi^{-1}(\{0\})$.
Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x - a)(b - x) & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction f est continue sur $[0, 1]$, ce n'est pas la fonction nulle mais en revanche la fonction $f\varphi$ est la fonction nulle. Ainsi on a formé un élément f non nul de E tel que $N_\varphi(f) = 0$. On en déduit que N_φ n'est pas une norme.

Exercice 77 : [énoncé]
Soit $[a, b] \subset [1, +\infty[$ avec $a < b$. Pour établir la densité de A, montrons que $A \cap [a, b]$ est non vide.
Considérons $q > 1$ tel que $qa \leqslant b$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$$

Considérons alors

$$E = \left\{m \in \mathbb{N} / m > N \text{ et } \frac{u_m}{u_N} \leqslant b\right\}$$

E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car $N + 1 \in E$) et majorée (car $u_n \to +\infty$). La partie E possède donc un plus grand élément M. Pour celui-ci, on a

$$\frac{u_M}{u_N} \leqslant b \text{ et } \frac{u_{M+1}}{u_N} > b$$

Or

$$u_{M+1} \leqslant q u_M$$

donc

$$\frac{u_M}{u_N} > \frac{b}{q} \geqslant a$$

Ainsi u_M/u_N est un élément de $A \cap [a, b]$.

Exercice 78 : [énoncé]
Soient $x \in E$ et $r > 0$.
Puisque A est une partie dense, $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$. On peut donc introduire $x \in B(a,r) \cap A$. Or par intersection d'ouverts, $B(a,r) \cap A$ est aussi une partie ouverte et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x,\alpha) \subset B(a,r) \cap A$. Puisque la partie B est dense, $B(x,\alpha) \cap B \neq \emptyset$ et finalement $B(a,r) \cap A \cap B \neq \emptyset$.
On peut donc conclure que $A \cap B$ est une partie dense de E.

Exercice 79 : [énoncé]
Pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on vérifie que

$$A_p = A + \frac{1}{p} I_n \to A$$

avec $A_p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 80 : [énoncé]
Soit f une fonction solution.
On a $f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$
Par une récurrence facile

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$$

De plus, puisque $f(-x+x) = f(-x) + f(x)$, on a $f(-x) = -f(x)$.
Par suite

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$$

Pour $x = p/q \in \mathbb{Q}$, $f(x) = pf(1/q)$ et $f(1) = qf(1/q)$ donc $f(x) = ax$ avec $a = f(1)$.
Les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto ax$ sont continues et coïncident sur $\mathbb{Q}$ partie dense dans $\mathbb{R}$ donc ces deux fonctions sont égales sur $\mathbb{R}$.
Au final f est une fonction linéaire.
Inversement, une telle fonction est évidemment solution.

Exercice 81 : [énoncé]
a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque

$$u_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \to x$$

avec $u_n \in \mathcal{D}$, la partie $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
b) Supposons que f s'annule en 0 et 1.

$$\frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right) = f(0)$$

donc la fonction f est impaire.
Par récurrence double, montrons $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 0$.
Pour $n = 0$ ou $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs $n \geqslant 1$ et $n - 1 \geqslant 0$.

$$\frac{f(n+1) + f(n-1)}{2} = f(n)$$

donne en vertu de l'hypothèse de récurrence : $f(n+1) = 0$.
Récurrence établie.
Par l'imparité

$$\forall p \in \mathbb{Z}, f(p) = 0$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons

$$\forall p \in \mathbb{Z}, f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0$$

Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $p \in \mathbb{Z}$,

$$f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(0 + \frac{p}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f\left(\frac{p}{2^n}\right)\right) \underset{HR}{=} 0$$

Récurrence établie.
Puisque f est continue et nulle sur une partie

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{p}{2^n} / p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

dense dans $\mathbb{R}$, f est nulle sur $\mathbb{R}$.
c) Posons $\beta = f(0)$ et $\alpha = f(1) - \beta$.
La fonction $g : x \mapsto f(x) - \alpha x + \beta$ est continue et vérifie la propriété

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(g(x) + g(y)\right)$$

donc g est nulle puis f affine.

Exercice 82 : [énoncé]
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si A est inversible

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - AB) = \det(A)\det(\lambda A^{-1} - B)$$

donc

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda A^{-1} - B)\det A = \det(\lambda I_n - BA) = \chi_{BA}(\lambda)$$

Ainsi les applications continues $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_{AB}(\lambda)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_{BA}(\lambda)$ coïncident sur la partie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ et donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 83 : [énoncé]
On sait

$${}^t(\mathrm{com}A)A = \det A.I_n$$

donc

$$\det(\mathrm{com}A)\det A = (\det A)^n$$

Si A est inversible on obtient

$$\det(\mathrm{com}A) = \det(A)^{n-1}$$

Puisque l'application $A \mapsto \det(\mathrm{com}A)$ est continue et qu'elle coïncide avec l'application elle aussi continue $A \mapsto (\det A)^{n-1}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut affirmer $\det(\mathrm{com}A) = (\det A)^{n-1}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 84 : [énoncé]
a) Si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{com}A)$$

et donc

$$\mathrm{com}A = \det(A)^t\left(A^{-1}\right)$$

De même

$$\mathrm{com}(P^{-1}AP) = \det(A)^t(P^{-1}A^{-1}P)$$

ce qui donne

$$\mathrm{com}(P^{-1}AP) = {}^tP\mathrm{com}A^t(P^{-1})$$

Les fonctions $A \mapsto \mathrm{com}(P^{-1}AP)$ et $A \mapsto {}^tP\mathrm{com}A^t(P^{-1})$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ partie dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est deux fonctions sont donc égales. Ainsi la relation

$$\mathrm{com}(P^{-1}AP) = {}^tP\mathrm{com}A^t(P^{-1})$$

est valable pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
b) C'est immédiat sachant que ${}^t(P^{-1})$ est l'inverse de ${}^tP$.

Exercice 85 : [énoncé]
a) On sait

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det A.I_n$$

Si A est inversible alors

$$\det\tilde{A}.\det A = (\det A)^n$$

donne

$$\det\tilde{A} = (\det A)^{n-1}$$

L'application $A \mapsto \det\tilde{A}$ étant continue et coïncidant avec l'application elle aussi continue $A \mapsto (\det A)^{n-1}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut assurer que $\det\tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Si A est inversible alors $\tilde{A}$ aussi donc

$$\mathrm{rg}(A) = n \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = n$$

Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et donc $\tilde{A} = 0$. Ainsi

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 0$$

Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$ alors $\dim\ker A = 1$ or $A\tilde{A} = \det A.I_n = 0$ donne $\mathrm{Im}\tilde{A} \subset \ker A$ et donc $\mathrm{rg}(\tilde{A}) \leqslant 1$. Or puisque $\mathrm{rg}(A) = n-1$, A possède un déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul et donc $\tilde{A} \neq O$. Ainsi

$$\mathrm{rg}(A) = n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 1$$

c) Soit P une matrice inversible. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$(P^{-1}\tilde{A}P)(P^{-1}AP) = \det A.I_n$$

et $P^{-1}AP$ inversible donc

$$P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP}$$

Ainsi
$$\tilde{A} = P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$$
Les applications $A \mapsto \tilde{A}$ et $A \mapsto P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$ sont continues et coïncident sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables alors il existe P inversible vérifiant $P^{-1}AP = B$ et par la relation ci-dessus $P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP} = \tilde{B}$ donc $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont semblables.
d) Si A est inversible alors $\tilde{A} = \det(A)A^{-1}$ et
$$\tilde{\tilde{A}} = \det(\tilde{A})\tilde{A}^{-1} = \det(A)^{n-2}A$$
Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\tilde{\tilde{A}} = \det(A)^{n-2}A$$

Exercice 86 : [énoncé]
Cas $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
On sait
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{com}A),\ B^{-1} = \frac{1}{\det B}{}^t(\mathrm{com}B)$$
et
$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}{}^t(\mathrm{com}AB) = B^{-1}A^{-1}$$
donc
$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}{}^t(\mathrm{com}AB) = \frac{1}{\det A\det B}{}^t(\mathrm{com}B){}^t(\mathrm{com}A)$$
puis
$${}^t(\mathrm{com}(AB)) = {}^t(\mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B))$$
et enfin
$$\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$$
Cas général
Posons
$$A_p = A + \frac{1}{p}I_n \text{ et } B_p = B + \frac{1}{p}I_n$$
Pour p assez grand $A_p, B_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et donc
$$\mathrm{com}(A_pB_p) = \mathrm{com}(A_p)\mathrm{com}(B_p)$$
Or la fonction $M \to \mathrm{com}M$ est continue donc par passage à la limite
$$\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$$

Exercice 87 : [énoncé]
Cas f de classe $\mathcal{C}^1$:
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$
Cas f continue :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
On a alors
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\|f - g\|_\infty + \left|\int_a^b g(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right|$$
donc pour n assez grand
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\varepsilon + \varepsilon$$
Par suite
$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 88 : [énoncé]
Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de fonction polynomiale telles $N_\infty(P_n - f) \to 0$.
On a alors
$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f(t) - P_n(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f(t) - P_n(t))\,\mathrm{d}t$$
or
$$\left|\int_0^1 f(t)(f(t) - P_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant N_\infty(f)N_\infty(f - P_n) \to 0$$
donc
$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
puis $f = 0$ par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive.

Exercice 89 : [énoncé]
Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telles $N_\infty(Q_n - f) \to 0$.
On a alors

$$\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Posons

$$P_n(t) = Q_n(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On vérifie alors sans peine que

$$\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } N_\infty(f - P_n) \to 0$$

Exercice 90 : [énoncé]
Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telles $N_\infty(Q_n - f) \to 0$. Posons $m_n = \inf\limits_{t\in[a,b]} Q_n(t) = Q_n(t_n)$ pour un certain $t_n \in [a,b]$. Montrons que $m_n \to m = \inf\limits_{t\in[a,b]} f$. Notons que $\inf\limits_{t\in[a,b]} f = f(t_\infty)$ pour un certain $t_\infty \in [a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, $N_\infty(Q_n - f) \leqslant \varepsilon$ donc $m_n = Q_n(t_n) \geqslant f_n(t_n) - \varepsilon \geqslant m - \varepsilon$ et $m = f(t_\infty) \geqslant Q_n(t_\infty) - \varepsilon \geqslant m_n - \varepsilon$ donc $|m_n - m| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $m_n \to m$. Il suffit ensuite de considérer $P_n = Q_n - m_n + m$ pour obtenir une solution au problème posé.

Exercice 91 : [énoncé]
Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telle $N_\infty(Q_n - f') \to 0$.
Posons alors $P_n(x) = f(a) + \int_a^x Q_n(t)\mathrm{d}t$. L'inégalité
$|P_n(x) - f(x)| \leqslant \int_a^x |f'(t) - Q_n'(t)|\,\mathrm{d}t$ permet d'établir que $N_\infty(f - P_n) \to 0$ et puisque $P_n' = Q_n$, la suite (P_n) est solution du problème posé.

Exercice 92 : [énoncé]
a) On a

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = (x + (1-x))^n = 1$$

On a

$$\sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) = nx$$

via $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et la relation précédente
De manière semblable

$$\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1)B_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) = nx(1 + (n-1)x)$$

b) On a

$$n^2\alpha^2 \sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k\in A} (k - nx)^2 B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k\in[\![0,n]\!]} (k - nx)^2 B_{n,k}(x)$$

car les $B_{n,k}$ sont positifs sur $[0,1]$.
Par suite

$$n^2\alpha^2 \sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant nx(1-x)$$

d'où

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

c) Pour tout $\varepsilon > 0$, par l'uniforme continuité de f, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], |x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{x\in A} |f(x) - f(k/n)|\, B_{n,k}(x) + \sum_{x\in B} |f(x) - f(k/n)|\, B_{n,k}(x)$$

donc

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2\,\|f\|_\infty \sum_{x\in A} B_{n,k}(x) + \sum_{x\in B} \varepsilon B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} + \varepsilon$$

Pour n assez grand, on a

$$\|f\|_\infty / 2n\alpha^2 \leqslant \varepsilon$$

et donc $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2\varepsilon$ uniformément en x.

Exercice 93 : [énoncé]
a) On a

$$\int_0^1 t(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)}$$

On en déduit

$$a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \geqslant 2\int_0^1 t(1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

b) Sur $[\alpha, 1]$,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{(1-\alpha^2)^n}{a_n} \leqslant (n+1)(1-\alpha^2)^n \to 0$$

c) Sur le compact $[-1,1]$, f est uniformément continue car f est continue. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in [-1,1]\,, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Pour $\alpha' = \min(\alpha, 1/2)$, on a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leqslant \alpha'$
Si $x, y \in [-1,1]$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Sinon $x, y \in [1/2, +\infty[$ ou $x, y \in]-\infty, -1/2]$ et alors

$$|f(x) - f(y)| = 0 \leqslant \varepsilon$$

d) On a

$$f_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(u)\varphi_n(x-u)\,\mathrm{d}u$$

Or

$$\varphi_n(x-u) = \sum_{k=0}^{2n} a_k(u)x^k$$

donc

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{x-1}^{x+1} f(u)a_k(u)\,\mathrm{d}u\right) x^k$$

Mais

$$\int_{x-1}^{x+1} f(u)a_k(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-1/2}^{1/2} f(u)a_k(u)\,\mathrm{d}u$$

pour $x \in [-1/2, 1/2]$ car $x-1 \leqslant -1/2$ et $x+1 \geqslant 1/2$ alors que f est nulle en dehors que $[-1/2, 1/2]$. Il s'ensuit que f_n est polynomiale.
e) On observe que

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

et la relation proposée est alors immédiate sur $[-1/2, 1/2]$.
f) On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x) - f(x-t)|\,\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t + 4\,\|f\|_\infty \int_\alpha^1 \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon + 4\,\|f\|_\infty \int_\alpha^1 \varphi_n(t)$$

Or

$$\int_\alpha^1 \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$$

donc pour n assez grand

$$4\,\|f\|_\infty \int_\alpha^1 \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

g) Il suffit de commencer par approcher la fonction $x \mapsto f(2ax)$ qui vérifie les conditions de la question précédente.
h) Soit $A > 0$ tel que $[a,b] \subset [-A, A]$. Il suffit de prolonger f par continuité de sorte qu'elle soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Exercice 94 : [énoncé]
a) Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

$$0 \leqslant \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f-P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f-P) \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty\,\varepsilon$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient $\int_a^b f^2 = 0$ et donc $f = 0$.
b) L'intégrale étudiée est bien définie. Par intégration par parties,

$$(n+1)I_n = (1-i)I_{n+1}$$

Or $I_0 = \frac{1+i}{2}$ donc

$$I_n = \frac{(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}}n!$$

c) $I_{4p+3} \in \mathbb{R}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4p+3}\sin(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$$

puis

$$\int_0^{+\infty} u^p \sin(u^{1/4})\mathrm{e}^{-u^{1/4}}\,\mathrm{d}u = 0$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 95 : [énoncé]
Soit $\varepsilon > 0$. Pour $N \in \mathbb{N}$ posons

$$F_N = \{x \in [1, +\infty[\,; \forall n \geqslant N, |f(nx)| \leqslant \varepsilon\}$$

La condition $|f(nx)| \leqslant \varepsilon$ définie une partie fermée de $[1, +\infty[$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. On en déduit que F_N est une partie fermée en tant qu'intersection de parties fermées.
En vertu de l'hypothèse de travail

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} F_N = [1, +\infty[$$

Par le lemme de Baire, une union dénombrable de fermés d'intérieurs vide est d'intérieur vide. Ce n'est ici pas le cas, on peut donc affirmer que l'un au moins de F_N est d'intérieur non vide. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a < b \in [1, +\infty[$ tels que $[a, b] \subset F_N$ ce qui signifie

$$\forall x \in [a, b]\,, \forall n \geqslant N, |f(nx)| \leqslant \varepsilon$$

Considérons alors la partie

$$X = \bigcup_{n \geqslant N} [na, nb]$$

sur laquelle les valeurs prises par f vérifie $|f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Pour n assez grand

$$nb \geqslant (n+1)a$$

et les intervalles $[na, nb]$ et $[(n+1)a, (n+1)b]$ se superposent de sorte que la partie X forme alors un voisinage de $+\infty$. Il existe alors $A > 0$ tel que $[A, +\infty[\subset X$ et donc

$$\forall x \geqslant A, |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

On peut alors affirmer que f tend vers 0 en $+\infty$.