1. Former la $n^{ième}$ somme partielle de chacune des séries suivantes, en déduire la nature des séries:

   (a) $\sum \frac{1}{4^{n-1}}$, $\sum 3^n$, $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\sum (-1)^{n+1} n$

---

2. Donner le terme général de chacune des séries suivantes et déduire leur nature:

   (a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \cdots$

   (b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{8}{9} + \frac{16}{17} + \cdots$

---

3. Déterminer la nature de chacune des séries suivantes, définies par leur terme général:

   a) $\frac{n-2}{n^3}$, *b)* $\frac{n+2}{n(n+1)}$, *c)* $\frac{1}{2^n+1}$, *d)* $\frac{1}{n^n}$

   e) $\ln \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$ *f)* $\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ *g)* $\frac{2^{n-1}}{n^n}$ *h)* $\frac{e^{\arctan n}}{1+n^2}$

   i) $\frac{n}{(n+1)!}$ *j)* $\left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$ *k)* $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ *l)* $\frac{1}{n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

   m) $\frac{1}{n \ln n}$ *n)* $\frac{1}{(\ln n)^n}$ *o)* $\frac{n!}{n^n}$ *p)* $\frac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}$

   q) $\frac{1}{1.3.5.\cdots.(2n+1)}$ *r)* $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ *s)* $\frac{\cos n\pi}{n}$ *t)* $\frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$

4. Montrer que la série

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

   est semi-convergente

---

5. Déterminer la nature de la série numérique de terme général:

$$u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$$

---

6. Déterminer le rayon, et le domaine de convergence des séries entières suivantes:

   a) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n4^n}$, *b)* $\sum_{n \geq 1} \frac{(x-1)^{2n}}{n4^n}$, *c)* $\sum_{n \geq 0} \frac{nx^n}{(n+1)2^n}$

   d) $\sum_{n \geq 0} \frac{(x-2)^n}{(2n-1).2^n}$, *e)* $\sum_{n \geq 0} n! x^n$, *f)* $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

   g) $\sum_{n \geq 0} \frac{nx^n}{n+2}$, *h)* $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n}.x^n}{3^n}$.

---

7. Donner le domaine de convergence puis la somme des séries suivantes:

$$a) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \qquad b) \sum_{n\geq 0} (x+5)^n, \qquad c) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$$

$$d) \sum_{n\geq 0} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}, \qquad e) \sum_{n\geq 1} nx^n, \qquad f) \sum_{n\geq 0} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$$

---

8. Développer en série entières de $(x-c)$ les fonctions suivantes:

$$a)\ f(x) = \frac{1}{2+x}, \quad c=0, \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}, \quad c=0$$

$$c)\ f(x) = \cos^2 x, \quad c=0, \qquad d)\ f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}, \quad c=0 \text{ et } x>0$$

$$e)\ f(x) = \cos(x+\frac{\pi}{3}), \quad c=\frac{\pi}{3}, \qquad f)\ f(x) = sh(x-2), \quad c=2$$

---

9. On considère pour l'entier $n \geq 2$ la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$$

(a) Etudier les séries dérivées $\sum u_n'(x)$ et $\sum u_n''(x)$

(b) Déduire la somme de la série $\sum u_n(x)$

(c) Déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{2^n n(n-1)}$$

---

10. Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes:

$$a) \sum_{n\geq 0} (-1)^n (2n+1) x^{2n}, \qquad b) \sum_{n\geq 1} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$$

---

11. Donner le rayon de convergence des séries suivantes:

(a) $x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots$

(b) $1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \cdots$

(c) $1 + x + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + x^5 + \cdots$

---

12. Soit

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Vérifier que f adment une série de Fourier et trouver cette série. Déduire la lime de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}$

---

13. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. On considère la fonction $2\pi-$ périodique

$$f(x) = \cos \alpha x \qquad \text{si} \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

(a) Déterminer la série de Fourier de f

(b) Déduire les sommes des séries suivantes:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}; \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}; \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}; \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

---

14. Soit la fonction f de période 2π

$$f(x) = ch\alpha x \qquad x \in [-\pi, \pi], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Trouver le développement en série de Fourier de f en déduire la somme de chacune des séries suivantes

$$S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}; \qquad S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1}$$

---

15. Soit $\alpha \in [0, \pi]$ et f_α la fonction $2\pi-$ périodique et impaire

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (\pi - \alpha)x & \text{si} \quad x \in [0, \alpha] \\ \alpha(\pi - x) & \text{si} \quad x \in [\alpha, \pi] \end{cases}$$

Donner le développement en série de Fourier de f_α en déduire la somme de $\sum_{n \geq 1} \sin n\alpha . \frac{\sin nx}{n^2}$. Trouver $S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)^2}$

---

16. Soit $f(x) = x$

(a) Développer f en une série de Fourier en sin dans $[0, \pi]$

(b) Développer $|f|$ en une série de Fourier en cos dans $[-\pi, \pi]$

---

17. On donner la fonction $2\pi-$ périodique $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$

(a) Donner la série complexe de f

(b) Déduire la série réelle de f

(c) Soit $g(x) = x$ la fonction $2\pi-$ périodique sur $[-\pi, \pi]$. Etablir une relation entre f et g et déduire la série réelle de g

(d) La série de g converge -t- elle vers g partout? Quelle condition faut - il imposer à g pour avoir une convergence partout.

(e) Déduire la série de g au point π

---

18. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, paire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad t = \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$

(b) Etudier les condtions de Dirichlet relatives à f et donner le domaine de convergence de la série de Fourier de f

(c) Calculer les coèfficients de Fourier de f

(d) Déduire la somme de la série $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$

(e) Utiliser la formule de Parseval pour de'duire la somme de la série $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

(f) En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
