1. Résoudre les systèmes différentiels suivants (La variable indépendante étant t)

   (a)
$$\begin{cases} x' &= x-y-z \\ y' &= x-y \\ z' &= x-z \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} x' &= 3x-y+z \\ y' &= 2x+z \\ z' &= x-y+2z \end{cases}$$

   (c)
$$\begin{cases} x' &= x-y \\ y' &= x+y+z \\ z' &= y+z \end{cases} \quad \text{avec } X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (d)
$$\begin{cases} x' &= 2x+y+\sin t \\ y' &= x+z \\ z' &= -2y+2z+\cos t \end{cases}$$

   (e)
$$\begin{cases} x' &= x-2y+e^{t} \\ y' &= x+4y+e^{2t} \end{cases}$$

---

2. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Exprimer, par récurrence, $A^n, n \geq 1$, en fonction de A et n

   (b) En déduire $\exp(At)$ en fonction de A et t.

   (c) Déduire la solution du système différentiel linéaire $X'(t) = A.X(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

---

3. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = A + I$$

   (a) Montrer que $e^{-It} = Ie^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

   (b) Calculer B^n, $n \in \mathbb{N}$ en déduire qte B est nilpotente

   (c) Calculer e^{Bt} et en déduire e^{At}

   (d) Déduire la solution du système différentiel linéaire $X'(t) = A.X(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$
