

1. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'endomorphisme qui, dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Trouver le spectre réel et le spectre complexe de  $f$

---

2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'endomorphisme qui, dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que  $f$  est diagonalisable
  - (b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$
  - (c) Trouver une matrice diagonale semblable à  $A$
  - (d) Déduire la matrice de passage  $P$  de la canonique  $B = \{e_1, e_2\}$  à la base propre  $B' = \{v_1, v_2\}$
  - (e) Soit  $u = 2e_1 - 3e_2$ . Trouver les composantes de  $u$  dans  $B'$ .
- 

3. Trouver les espaces propres associés à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

en déduire que  $A$  est diagonalisable.

---

4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Montre que  $\mathbb{R}^3$  peut s'écrire comme  $E \oplus F$  où  $E$  et  $F$  sont deux espaces propres de  $A$  de dimensions respectives  $\dim E = 2$ ,  $\dim F = 1$ .
  - (b) En déduire que  $A$  est diagonalisable. Trouver la matrice de passage entre la base canonique et une base propre qu'on déterminera.
- 

5. Vérifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  mais pas dans  $\mathbb{R}$ . Trouver alors la matrice diagonale complexe semblable à  $A$ .

---

6. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- (a) Trouver la matrice diagonale semblable à  $A$  en déduire  $A^k$ ,  $k \geq 1$ .  
 (b) On donne les suites numérique

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Montrer que  $X_n = A^n X_0$  où  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ . En déduire une expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$

---

7. Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans lui même représentée dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix} \quad m \in \mathbb{R}$$

- (a) Déterminer  $m$  pour que  $f$  soit bijective  
 (b) On pose  $m = 4$
1. Calculer  $A^{-1}$
  2. Quel est l'antécédent du vecteur  $e_3$  par  $f$
  3. Calculer les valeurs propres de  $f$
  4. Quelles valeurs faut-il donner à  $\alpha$  et  $\beta$  pour que la famille  $B = \{a, b, c\}$ , où  $a = (1, 1, 1)$ ,  $b = (1, \alpha, -2)$ ,  $c = (1, \beta, 0)$  soit une base formée de vecteurs propres de  $f$ ?
  5. Vérifier que  $A$  est diagonalisable et trouver la matrice diagonale qui lui est semblable
  6. Calculer  $A^n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 

8. Soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$$

Diagonaliser la matrice du système et en déduire sa solution.

---

9. Soit la fonction à deux variables

$$f(x, y) = \frac{7}{3}x^3 + xy^2 + 2x^2y - 4x$$

Trouver les points critiques de  $f$  et étudier la nature de chacun d'eux

---

10. Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}^3$  par

$$f(x, y, z) = xy + yz + 2xz - xyz$$

- (a) Montrer que les points critiques de  $f$  sont

$$P_1(0, 0, 0) \text{ et } P_2(2, 4, 2)$$

- (b)
  1. Donner sans calcul le développement limité de  $f$  à l'ordre 2 en  $P_1$ .
  2. En déduire la matrice hessienne  $H_f(P_1)$ .
  3. Déterminer les valeurs propres de  $H_f(P_1)$  et en déduire la nature du point  $P_1$ .
- (c)
  1. Déterminer le développement limité de  $f$  à l'ordre 2 en  $P_2$ .
  2. En déduire la matrice hessienne  $H_f(P_2)$  et en déduire la nature du point  $P_1$ .
-