1. On se met dans l'e.v. $\mathbb{R}^3$ muni des lois habituelles. Soit:

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in IR^3 \mid \left\{ \begin{array}{cccc} x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & & = & 0 \end{array} \right. \} \\ G &= \{(x,y,z) \in IR^3 \mid (x-y)^2 = 2x+y\} \end{aligned}$$

   (a) Vérifier que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ alors que G ne l'est pas
   (b) Trouver une base de F et en dvduire sa dimension
   (c) Quelle est l'interprétation géométrique de F

---

2. On se met dans $M_2(\mathbb{R})$ muni des lois habituelles. On considère les sous ensembles:

$$\begin{aligned} F &= \{A \in M_2(IR) \mid A = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}\} \\ G &= \{A \in M_2(IR) \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

   (a) Vérifier que F est un s.e.v de $M_2(\mathbb{R})$ alors que G ne l'est pas
   (b) Trouver une base de F et en dvduire sa dimension

---

3. On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes à coèfficients réels de degré ≤ 2. Soit

$$E = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(-1) = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1-x) = P(x)\}$$

Montrer que E et F sont deux s.e.v de $\mathbb{R}_2[x]$. En donner une base de chacun d'eux et déduire leurs dimensions

---

4. On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = I_2$. On définit l'ensemble

$$E = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

   (a) Montrer que E est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$
   (b) Montrer que $\{A, I\}$ est un système de générateurs de E, en dvduire la dimension de E
   (c) Résoudre dans E l'équation: $X - A^2X + AXA - A = 0$.

---

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par $f(x,y) = (2x+y, x-2y)$.
   (a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Soit $B = \{v_1 = 2e_1 + e_2, v_2 = e_1 - 2e_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Écrire la représenttion matricielle de f dans la base B.
   (c) Soit $X = 2e_1 + 3e_2$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Donner les composantes de X dans la base B.
