

Mathématiques pour l'ingénieur (UTC604)

Final 2020-2021

🕒 3h :00



Téléphone et Calculatrice sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centre de Beyrouth et les antennes régionales

Exercice 1 (30 points) On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3$, en déduire les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
2. La matrice A est-elle diagonalisable? Justifier votre réponse.
3. Soit $B = A - 2I$. Montrer que $B^n = 0, \forall n \geq 2$.
4. On rappelle le Binôme de Newton pour les matrices qui commutent : $E, D \in M_r / E.D = D.E$

$$\begin{aligned} (E + D)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k E^k D^{n-k} \\ &= D^n + C_n^1 E.D^{n-1} + C_n^2 E^2.D^{n-2} + \dots + C_n^n E^n \end{aligned}$$

$$\text{où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Utiliser le Binôme de Newton pour montrer que $A^n = 2^n(1-n).I + 2^{n-1}.n.A$. Sachant que $A = 2I + B$.

5. On considère le système différentiel linéaire homogène donné par $\frac{dX}{dt} = AX$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$; soit

$$(S) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -4x(t) + 4y(t) \\ \frac{dz}{dt} = -2x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

Développer $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + t.A + \frac{(t.A)^2}{2!} + \frac{(t.A)^3}{3!} + \dots$ et montrer que $e^{tA} =$

$$(1 - 2t)e^{2t}.I + te^{2t}.A, \forall t \in \mathbb{R}. (\text{On donne } e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}, \forall X \in \mathbb{R}).$$

6. Déduire la solution générale de (S) .

Exercice 2 (35 points) Conseil avant de commencer :

beaucoup de calcul de dérivées partielles se déduit par symétrie car la fonction donnée est symétrique

Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$$

1. Montrer que f admet 5 points critiques dont $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(-2, 2, 2)$.
2. Déterminer les autres points critiques de f , M_3, M_4 et M_5 .
3. Calculer $f(M_i)$, $i = 2, 3, 4, 5$ en déduire que les points M_i , $i = 2, 3, 4, 5$ ont la même nature
4. trouver la matrice hessienne H_f en M_1 et M_2 .
5. Déterminer la nature de M_1 et M_2 et déduire celle des autres points critiques..

Exercice 3 (35 points) : On voudrait résoudre le problème de conduction thermique le long d'une tige de longueur $2m$ telle que la température sur le bord reste toujours nulle.

1. Soit $\varphi(x) = x$, $x \in [0, 2]$.
Justifier et donner une série de Fourier en sinus de la fonction $f(x)$.
2. On considère le problème de conduction thermique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 4 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad 0 < x < 2, \quad t \geq 0 \quad (1) \\ u(0, t) = u(2, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2) \\ u(x, 0) = x \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (3) \end{array} \right.$$

$u(x, t)$ représente la température au point d'abscisse x à l'instant t . On suppose que $u(x, t) = f(x).g(t)$.

- (a) Montrer que (1) est équivalente à deux équations différentielles ordinaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x) - k.f(x) = 0 \quad (4) \\ g'(t) - \frac{k}{4}g(t) = 0 \quad (5) \end{array} \right. ; k \in \mathbb{R}$$

- (b) Montrer, en résolvant (4) avec les conditions aux limites (2), que $k < 0$. Poser $k = -\omega^2$ et donner $f(x)$ la solution de (4) et (2).
- (c) Résoudre l'équation (5), en déduire que $u_n(x, t) = (A_n \sin \omega_n x + B_n \cos \omega_n x).e^{-(\omega_n)^2/4}$ est une solution de (1)
3. Soit $u(x, t) = \sum_{n \geq 0} u_n(x, t)$. En imposant les conditions (2), Trouver, en utilisant le développement en série de Fourier de la première question, la solution $u(x, t)$ du problème (1), (2), (3) .

Formulaire :

1. Système différentiel (S) : $\frac{dX(t)}{dt} = AX$: Sa S.G. est $X = e^{tA}.C$ où $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

A est diagonalisable si $P_A(\lambda)$ est scindé dans \mathbb{R} et si $\dim E_{\lambda_i} = m_i = \text{mult}(\lambda_i)$

2. Extremum locaux :

$$\text{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

- (a) Si les v.p de $\text{Hess}_a(f)$ sont strictement positives alors a est un minimum local
- (b) Si les v.p de $\text{Hess}_a(f)$ sont strictement négatives alors a est un maximum local
- (c) Si les v.p de $\text{Hess}_a(f)$ n'ont pas le même signe alors a est un point selle
- (d) Si une des v.p de $\text{Hess}_a(f)$ est nulle alors on ne peut rien conclure

3. Les coefficients de Fourier pour une fonction impaire $f(x)$ de période $2T$:

$$\text{si } f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin \frac{n\pi}{T} x \text{ alors } b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{T} x\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{T} x\right) dx$$