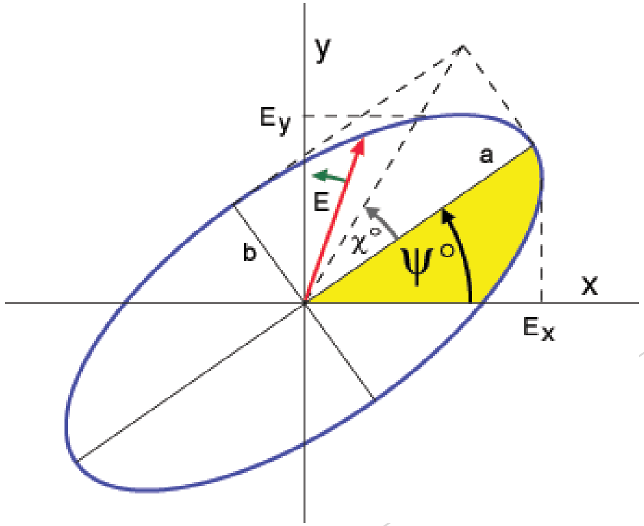
Institut Supérieur des Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam
Liban

UTC604: Mathématiques pour l'ingénieur

J.SAAB

Ch 1: Structure vectorielle



Espace vectoriel – Sous espace vectoriel

- Une structure d'e.v sur un ensemble E se résume par la définition de deux operations sur E: une loi interne + qui permet la somme de deux éléments de E ($x+y \in E, \forall x,y \in E$) et une loi externe . qui permet la multiplication d'un élément de E par un réel

  ($\lambda.x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$).

- On se contente d'évoquer la structure vectorielle sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ ou sur $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de type $m \times n$
- Les espaces $(\mathbb{R}^n,+,.), (\mathbb{R}_n[x],+,.)$ et $(M_{m,n}(\mathbb{R}),+,.)$ sont des e.v.

Exemples:

1- Sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} (1,2)+(3,6) = (4,8) \in \mathbb{R}^2 \\ 5.(-1,4) = (-5,20) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

2- Sur $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{cases} (x^2+3x-1)+(2x^2+5) = (3x^2+3x+4) \in \mathbb{R}_2[x] \\ -2.(x^2-5x) = -2x^2+10x \in \mathbb{R}_2[x] \end{cases}$$

3- Sur $M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \\ -2.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -6 & 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Sous espace vectoriel

- Un sous ensemble F d'en e.v (E,+,.) est un s.e.v. de E si:
  - $F \neq \phi$
  - Si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$
  - Si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda . x \in F$

- **Tout s.e.v. contient l'élément 0**

Exemple:

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$:

$1-\;\; 0+0+0=0$ donc $(0,0,0) \in F$ et $F \neq \phi$

$2-\;\;$ Si $X=(x,y,z),\ X' = (x',y',z') \in F$ alors $X+X' = (x+x',y+y',z+z')$:

On a :

$$(x+x')+(y+y')+(z+z') = \underbrace{(x+y+z)}_{X\in F} + \underbrace{(x'+y'+z')}_{X'\in F'} = 0+0=0$$

donc $X+X' \in F$.

$3-\;\;$ Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X=(x,y,z) \in F$ alors $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

On a $\lambda x+\lambda y+\lambda z = \lambda \underbrace{(x+y+z)}_{X\in F} = \lambda.0=0$

donc $\lambda X \in F$.

Parsuite F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Base et dimension d'un e.v

- Une famille de vecteurs $\{v_1, \cdots, v_n\}$, $v_i \in E$ est dite système générateur de E si tout vecteur X de E est une c.l. des v_i

$$X = \lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_n.v_n \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

- Une famille de vecteurs $\{v_1, \cdots, v_n\}$, $v_i \in E$ est dite libre si aucun d'entre eux n'est une c.l. des autres:

$$(\lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_n.v_n = 0) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0)$$

Si la famille $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est libre et générateur, on dit qu'elle est une base de E et que dimension de E est n.

$$\dim E = n$$

Trouver une base et la dimension de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$

- $X = (x,y,z) \in F$ donc $X = (x,y,-x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$
$= xv_1 + yv_2, \; v_1, v_2 \in F.$

donc $\{v_1, v_2\}$ engendre F.

- Si $xv_1 + yv_2 = 0$ alors $(x,y,-x-y) = 0$ et donc $x = y = 0$

D'où $\{v_1, v_2\}$ est une base de F et $\dim F = 2$.

Endomorphisme sur un e.v.

Définition: Une application $f : E \to E$ est un endomorphisme si

1- $f(x+y) = f(x) + f(y), \ \ \forall x, y \in E$

2- $f(\lambda . x) = \lambda . f(x), \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E$

Exemple: l'application $f(x,y) = (x+2y, x-y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$:

1- $f(X+X') = f(x+x', y+y') = (x+x'+2(y+y'), x+x'-(y+y'))$

$$= (x+2y, x-y) + (x'+2y', x'-y') = f(X) + f(X')$$

2- $f(\lambda . X) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + 2\lambda y, \lambda x - \lambda y') = \lambda (x+2y, x-y) = \lambda f(X)$

Matrice associée à un endomorphisme

Soit f un endomorphisme sur E et $B = \{v_1, \cdots v_n\}$ une base de E.

pour tout i, on a $f(v_i) \in E$ donc $f(v_i)$ est une c.l. des v_i

$$f(v_i) = a_{1\,i} v_1 + a_{2\,i} v_2 + \cdots + a_{n\,i} v_n$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base B.

On note $A = M(f, B)$

Exemple

$f(x,y) = (x + 2y, -x + 3y)$ est un endomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.

$B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$

On a $f(e_1) = (1,-1),\ \ f(e_2) = (2,3)$

La matrice de f dans la base B est

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$