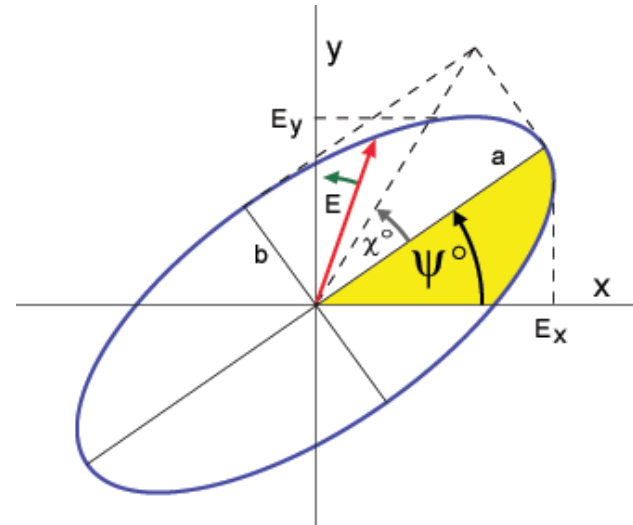


UTC604: Mathématiques pour l'ingénieur

J.SAAB

Ch 2: Diagonalisation d'un endomorphisme



Valeurs propres et vecteurs propres

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n , soit A sa représentation matricielle. On note par $P_f(\lambda)$ ou $P_A(\lambda)$, le déterminant:

$$|A - \lambda \cdot I_n|$$

- ▶ Le polynôme $P_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I_n|$ est dit polynôme caractéristique de A ou de f .
- ▶ Les racines (réelles ou complexes) de $P_A(\lambda)$ sont dites les valeurs propres de A . (on écrit v.p de A).

Exemple:

$$\text{Calcul des v.p de } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Les v.p de A sont

$$\lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = 3.$$



On note par $Sp(A) = \{\text{v.p de } A\} = \{2, 3\}$ appelé "spectre de A ".

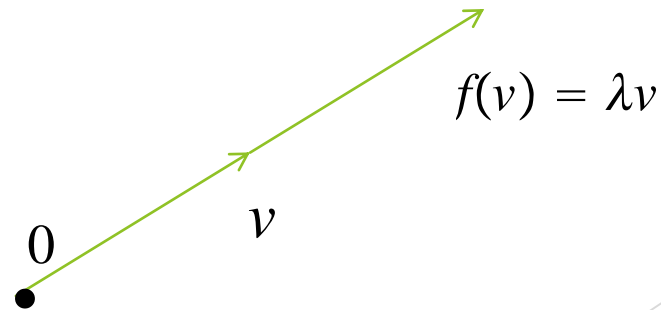
Vecteur propre - espace propre

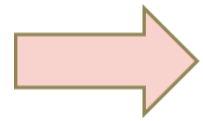
- ▶ Soit X un vecteur **non nul** de \mathbb{R}^n . On dit que X est un vecteur propre d'un endomorphisme f ou de sa représentation matricielle A , si le vecteur AX est colinéaire avec X

$$AX = \lambda X$$

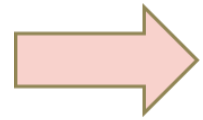
- ▶ Le scalaire λ est dit v.p associée à X

- ▶ On écrit X est un $\vec{\text{v.p}}$ de A .

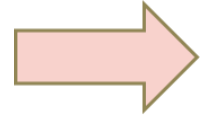




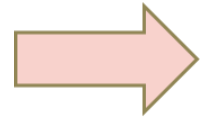
Si X est un v.p de A alors $\alpha.X$ est un v.p de A , $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$



$E_\lambda(A) = \{ \text{v.p de } A \text{ correspondant à } \lambda \} \cup \{0\}$ est dit espace propre de λ



$E_\lambda(A)$ est un s.e.v de \mathbb{R}^n de dimension $\leq mult(\lambda)$



$P_A(\lambda)$ est dit scindé dans \mathbb{R} si, en comptant la multiplicité:

ses n racines sont réelles.

Recherche des vecteurs propres:

- ➔ Soit λ une v.p de A , $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un $\vec{\text{v.p}}$ de A si X est une solution du système linéaire: $(A - \lambda I)X = 0$
- ➔ Le système $(A - \lambda I)X = 0$ admet une infinité de solutions.
- ➔ Il existe un nombre fini de directions pour les $\vec{\text{v.p}}$ mais un nombre infini dans chaque direction.

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Ses v.p sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$

$X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sont 2 v.p de A $\vec{}$ si

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \text{ et } AX_2 = \lambda_2 X_2.$$

Calcul de $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: On a $(A - 2I)X_1 = 0$

c.à.d.
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les solutions de ce système sont engendrées par $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcul de $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\text{On a } (A - 3I)X_1 = 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les solutions de ce système sont engendrées par $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diagonalisation d'une matrice

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n , Si B et B' sont deux bases de \mathbb{R}^n alors f admet deux représentations matricielles différentes A et A' dans la base B et dans la base B' .

— Puisque A et A' représentent un même endomorphisme, on dit que A et A' sont équivalentes ou semblables.

— Si P est la matrice de passage de B à B' alors $A' = P^{-1}AP$



Si A est donnée, on cherche une matrice de forme simple (diagonale) qui lui est semblable. On cherche une base B' de sorte que $A' = M(f, B')$ est diagonale.

Relation entre v.p, vect.p et diagonalisation

Soit A une matrice, soient $\lambda_1 \dots \lambda_n$ les v.p de A et $v_1 \dots v_n$ les vect. p associés. $A = M(f, B)$. Si $B' = \{v_1 \dots v_n\}$ est une base de \mathbb{R}^n alors:

$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$

D'où

$$A' = M(f, B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

est diagonale.

1- Une matrice semblable à une matrice diagonale est dite diagonalisable.

2- Les λ_i peuvent n'est pas être toutes différentes.

3- Une v.p de multiplicité m engendrent $k \xrightarrow{\quad} k$ v.p indépendants ($k \leq m$).



Si

— $P_A(\lambda)$ est scindé dans \mathbb{R}

— $\forall \lambda_i$ v.p de multiplicité m_i on a $\dim E_{\lambda_i} = m_i$

alors

A est diagonalisable.

Dans ce cas: $A' = P^{-1}AP$ avec

$$A' = M(f, B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ v_1 & \dots & v_n \\ \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$$

Applications

On suppose que A est diagonalisable $A \sim A'$:

$$\blacktriangleright |A| = |A'| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\blacktriangleright A^k = P(A')^k P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_n)^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

► **Résolution d'un système différentiel linéaire:**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (1) \text{ est un système différentiel linéaire}$$

$$\text{le système (1) est équivalent à } \frac{dY}{dt} = A'Y \quad (2)$$

$$Y = P^{-1}X \quad \text{donc } X = PY$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ sont les v.p de A

$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux v.p associés.



Les v.p de A sont simples donc A est diagonalisable. $A' = P^{-1}AP$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer A^5 par exemple,

on a $A^5 = P(A')^5 P^{-1}$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 3^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -179 & 422 \\ -211 & 454 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système différentiel linéaire

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

$$\text{avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système $\frac{dY}{dt} = A'Y$

$$\text{avec } Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 2u \\ \frac{dv}{dt} = 3v \end{cases}$$

Sa solution est

$$\begin{cases} u(t) = c_1 e^{2t} \\ v(t) = c_2 e^{3t} \end{cases}$$

Comme $X(t) = PY(t)$

donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{cases}$$

Extremums des fonctions de 2 ou de 3 variables

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 en un point a de 2 ou de 3 variables. La Hessienne de f en a est la matrice symétrique

$$Hess_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 en a est

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \frac{{}^t h \cdot Hess_a(f) \cdot h}{2} + o(\|h\|)$$

Si $a \in (\mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3)$ est un extremum local de f

alors

a est un point critique de f ($d_a f(h) = 0$)

D'après Taylor:

$$f(a+h) - f(a) \simeq \frac{{}^t h \cdot \text{Hess}_a(f) \cdot h}{2}$$

$$\text{où } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Si $\text{Hess}_a(f)$ est définie positive (ses v.p sont strictement positives)

alors $f(a+h) > f(a)$ et a est un minimum local

Si $Hess_a(f)$ est définie négative (ses v.p sont strictement négatives)

alors $f(a + h) < f(a)$ et a est un maximum local

Si les v.p de $Hess_a(f)$ ont deux signes opposés alors a est un point selle

Si une des v.p est nulle, on ne peut pas juger.

Exemples

Etude de $f(x, y, z) = xy + yz + 2xz - xyz$

1-Montrer que $P_1(0, 0, 0)$ et $P_2(2, 4, 2)$ sont les points critiques de f

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \text{ si } (y + 2z - xy, x + z - xz, y + 2x - xy) = (0, 0, 0)$$

$P_1(0, 0, 0)$ et $P_2(2, 4, 2)$ sont les seuls points qui vérifient ce système

$P_1(0, 0, 0)$ et $P_2(2, 4, 2)$ sont les seuls points critiques de f

2- Etudier la nature de P_1 et P_2

$$Hess_{(x,y,z)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } Hess_{P_1}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les v.p de cette matrice sont

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}, \lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$$

Les v.p de $Hess_{P_1}(f)$ n'ont pas toutes le même signe donc P_1 est un point selle

De même $Hess_{P_2}(f) = -Hess_{P_1}(f)$

ses v.p sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = -1 - \sqrt{3}$

Les v.p de $Hess_{P_2}(f)$ n'ont pas toutes le même signe donc P_2 est un point selle