Equation de la corde vibrante Et Equation de la chaleur

Problème des ondes en dimenion 1

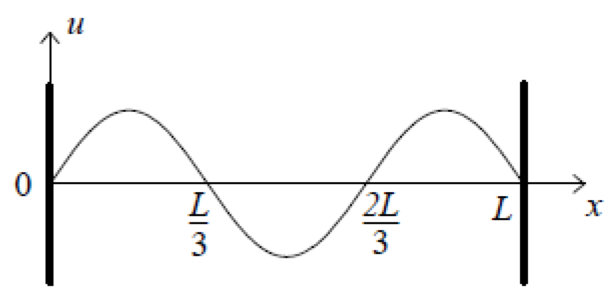
On considère une corde vibrante de longueur L

- mince,
- bien tendue,
- fixée aux bouts en $x = 0$ et $x = L$.

Hypothèses sur le modèle physique.

Soit $u(x,t)$, $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$, la position du point de la corde

à distance x de l'origine au temps t.



Corde vibrante fixée aux bouts.

hypothèses :

(a) la densité linéaire de la corde, ρ, est constante,

(b) la corde est d'une élasticité parfaite et n'offre aucune résistance à la flexion,

(c) on néglige la gravité,

(d) les particules de la corde se meuvent verticalement parce que le déplacement est faible,

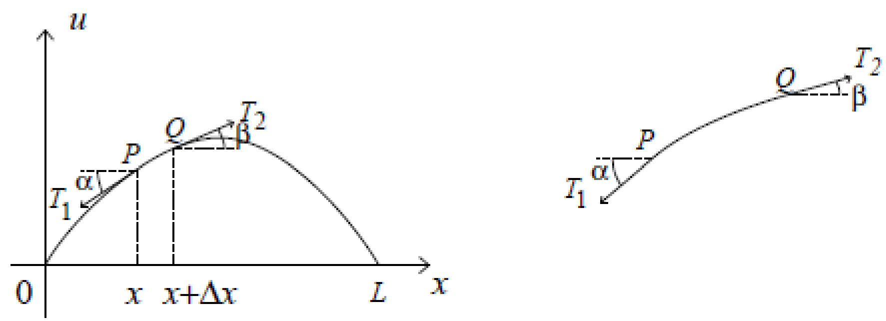
(e) la pente de la corde est faible, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim 0,$$

également parce que le déplacement est faible.

Par (b), les tensions T_1 en P et T_2 en Q sont tangentes à la corde et, par (d),

la composante horizontale de la tension est constante



Les composantes de la tension.

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{constante}.$$

Les composantes verticales en P et en Q sont, respectivement,

$$-T_1 \sin\alpha, \quad T_2 \sin\beta.$$

Selon la 2$^{\text{e}}$ loi newtonienne : masse $\times$ accélération $=$ résultante,

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_2\sin\beta - T_1\sin\alpha.$$

$$\frac{\rho\triangle x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_2\sin\beta}{T_2\cos\beta} - \frac{T_1\sin\alpha}{T_1\cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha.$$

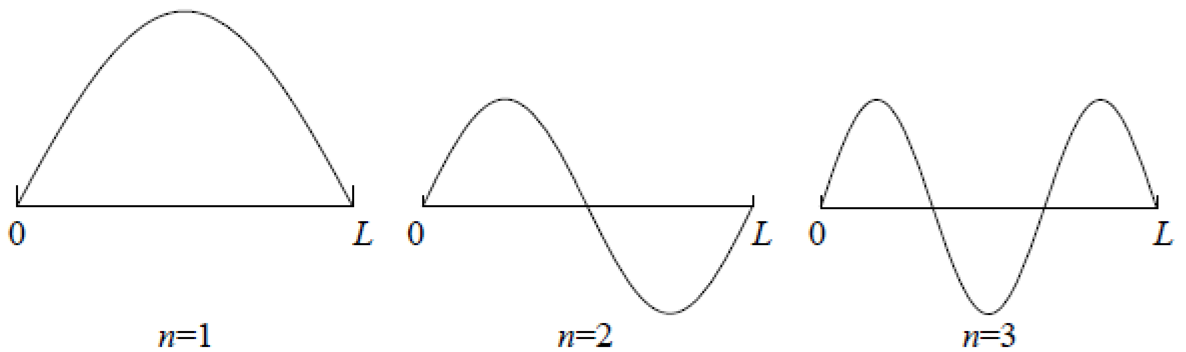
$\tan\alpha = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$, $\tan\beta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$ et en divisant par $\triangle x$, on obtient

$$\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\triangle x}\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right].$$

Finalement, lorsque $\triangle x$ tend vers zéro, on obtient l'équation des ondes en dimension 1 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Les déplacements simples. Une corde vibrante de longueur L fixée aux bouts admet une suite de déplacements simples $u_n(x,t)$ pour $t = t_0$



Déplacements simples.

$$u_1(x,t_0) = \sin\frac{\pi}{L}x,$$
$$u_2(x,t_0) = \sin\frac{2\pi}{L}x,$$
$$u_3(x,t_0) = \sin\frac{3\pi}{L}x,$$
$$\vdots$$
$$u_n(x,t_0) = \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Résolution par séparation des variables.

Considérons le problème de la corde vibrante fixée aux bouts et modélisé par l'E.D.P:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

avec les conditions aux limites (C.L.) :

(2) $$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

et les conditions initiales (C.I.) :

(3) $$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

La résolution de ce problème par séparation des variables comporte trois étapes :

Étape 1 : Séparation des variables. $u(x,t) = F(x)G(t)$

$$u_{tt} = F\ddot{G}, \quad u_{xx} = F''G,$$

l'E.D.P (1) devient:

$$F\ddot{G} = c^2 F''G.$$

En divisant par c^2FG, on a :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k, \quad \text{une constante.}$$

On obtient ainsi deux équations différentielles, l'une pour $F(x)$ et l'autre pour $G(t)$:

$$(4) \qquad F''(x) - kF(x) = 0,$$

$$(5) \qquad \ddot{G}(t) - c^2kG(t) = 0,$$

où k est à déterminer au moyen des conditions aux limites (2)

Étape 2 : Valeurs propres et fonctions propres.

On résout (4) et (5) tq $u = F.G$ vérifie les (C.L) (2):

$$\begin{aligned} u(0,t) &= F(0)G(t) = 0, \quad \text{pour tout } t, \\ u(L,t) &= F(L)G(t) = 0, \quad \text{pour tout } t. \end{aligned}$$

On exclut le cas $G(t) \equiv 0$, correspondant à la solution nulle sans intérêt $(u \equiv 0)$.

Rappel: $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

si $\Delta > 0 \rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ deux racines

La S.G est $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

Ainsi l'équation (4) devient:

$$(4) \qquad F''(x) - kF(x) = 0, \qquad F(0) = 0, \quad F(L) = 0.$$

Les conditions aux limites pour F déterminent les valeurs admissibles de k

(i) Si $k = 0$, (4) admet la solution générale :

$$F(x) = ax + b.$$

Donc

$$F(0) = 0 \implies b = 0$$

et

$$F(L) = 0 \implies aL = 0 \implies a = 0;$$

donc sans intérêt parce que $u \equiv 0$.

(ii) Si $k = \mu^2 > ($ (4) $.7)$ admet la solution générale :

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Rappel: $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

si $\Delta < 0 \rightarrow \lambda = \alpha + i\beta$ racine

La S.G est $y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x]$

De nouveau

$$F(0) = 0 \implies A + B = 0$$

et

$$F(L) = 0 \implies Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0.$$

On a donc le système homogène :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu L} & e^{-\mu L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\text{dét} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu L} & e^{-\mu L} \end{bmatrix} = e^{-\mu L} - e^{\mu L} \neq 0$ Donc l'unique solution est la solution nulle :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ce cas est aussi sans intérêt : $u \equiv 0$.

(iii) Si $k = -p^2 < 0$, (4) admet la solution générale :

$$F(x) = A\cos px + B\sin px.$$

$$F(0)=0 \implies A\cos 0 = 0 \implies A=0$$

$$F(L)=0 \implies B\sin pL = 0.$$

Or $B \neq 0$, sinon $u \equiv 0$; donc

$$\sin pL = 0,$$

$$pL = n\pi$$

pour indiquer la dépendance de p sur n, on écrit :

$$p_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

on a alors la suite de solutions

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Rappel: l'équation (5) est:

$$\ddot{G}(t) - c^2 k G(t) = 0,$$

Maintenant, on résout (5) avec

$$k = -p_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0,$$

où

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

La solution générale de cette dernière équation différentielle est

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t.$$

Donc les fonctions simples non nulles, qu'on appellera *fonctions propres* :

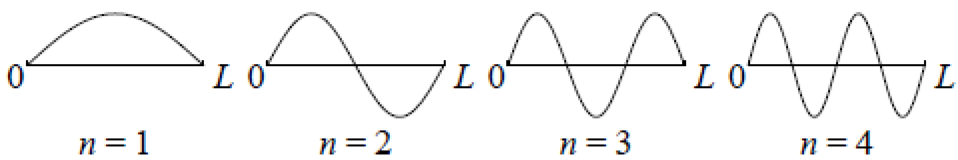
$$u_n(x,t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

sont des solutions de l'é.d.p. (1) qui satisfont les C.L. (2)

λ_n seront appelés *valeurs propres* du problème (1) - (2)

DÉFINITION On appelle *valeurs propres* (ou caractéristiques) les nombres λ_n pour lesquelles un problème différentiel homogène aux limites homogènes du type (1) - (2) admet les solutions non nulles $u_n(x,t)$, appelées *fonctions propres* (ou caractéristiques). L'ensemble de valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$ s'appelle le *spectre*.

En physique, u_n s'appelle le n^{e} mode normal ; le 1^{er} mode normal, u_1, s'appelle le mode fondamental, u_2 la 1^{re} harmonique, u_3 la 2^{e} harmonique, etc.



Les quatre premiers modes normaux.

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}L,$$

on voit que le n^{e} mode normal admet $n-1$ nœuds dans l'intervalle $(0, L)$

Étape 3 : Superposition des fonctions propres.

Pour satisfaire les conditions initales (3) , on superpose les solutions simples $u_n(x,t)$

d'après le lemme suivant.

LEMME 2.1 (Superposition de solutions d'un problème homogène). *Soient u et v deux solutions du problème homogène* (1) - (2) . *Alors $au+bv$ est aussi une solution.*

Par récurrence, toute combinaison linéaire (convergente) de solutions est aussi une solution.

Pour satisfaire les conditions initales (3) on cherche une solution qui est une somme (convergente) de fonctions propres :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x. \end{aligned}$$

On détermine les B_n et les B_n^*. En $t = 0$, $u(x,0)$ est une superposition de sinus :

Rappel: $f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\frac{n\pi}{T}x$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x).$$

Les B_n sont donc les coefficients de la série de Fourier de sinus de $f(x)$.

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

De même, en $t = 0$, $u_t(x,0)$ est aussi une superposition de sinus :

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \sin\frac{n\pi}{L}x = g(x).$$

Alors les $\lambda_n B_n^*$ sont les coefficients de la série de Fourier de sinus de $g(x)$:

$$\lambda_n B_n^* = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Finalement, la solution du problème de la corde vibrante (1) - (2) et (3) en série de FOURIER de sinus en x est :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

où les B_n et les $\lambda_n B_n^*$ sont les coefficients de FOURIER des conditions initiales $f(x)$ et $g(x)$ développées en série de sinus.

EXEMPLE Résoudre le problème de la corde vibrante :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0,$$

fixée aux bouts (C.L.) :

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

de déplacement initial triangulaire (C.I.) :

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 2kx/L, & 0 < x < \frac{L}{2}, \\ 2k(L-x)/L, & \frac{L}{2} < x < L, \end{cases}$$

et de vitesse initiale (C.I.) :

$$u_t(x,0) = g(x) = 13 \sin \frac{3\pi}{L} x + 2 \sin \frac{4\pi}{L} x.$$

RÉSOLUTION. Puisque la corde est de longueur L et est fixée aux bouts, les fonctions propres sont :

$$u_n(x,t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

et les valeurs propres sont : $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$

Par superposition, la solution satisfaisant les C.I. est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

En $t = 0$, on a :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x).$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= \frac{2}{L} \frac{2k}{L} \left[\int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx + \int_{L/2}^{L} (L - x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \right]. \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}\int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi}{L}x\,dx &= -\frac{L}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{L}x\Big|_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2}\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x\Big|_0^{L/2} \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{L/2}^{L} (L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx &= -\frac{L}{n\pi}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\Big|_{L/2}^{L} - \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\ &= \frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x\Big|_{L/2}^{L} \\ &= \frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

Alors,

$$B_n = \frac{4k}{L^2}\frac{L^2}{n^2\pi^2}2\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{8k}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$B_n = \begin{cases} 0, & n \text{ pair}, \\ 8k/(\pi^2 n^2), & n = 1, 5, 9, 13, \ldots, \\ -8k/(\pi^2 n^2), & n = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}$$

c'est à dire on distingue:

$$\begin{cases} n = 2m & (m \geq 1) \\ n = 4m+1 & (m \geq 0) \\ n = 4m-1 & (m \geq 1) \end{cases}$$

Donc, le développement de $f(x)$ est

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}x - \cdots\right).$$

Pour déterminer les B_n^* on dérive $u(x,t)$ par rapport à t :

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n B_n \sin \lambda_n t + \lambda_n B_n^* \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Alors, en $t = 0$,

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \sin \frac{n\pi}{L} x \ = 13 \sin \frac{3\pi}{L} x + 2 \sin \frac{4\pi}{L} x.$$

Comme le 3e membre est déjà sous forme de série de FOURIER de sinus, on identifie les coefficients :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 B_1^* &= \ 0 \implies B_1^* = 0, \\
\lambda_2 B_2^* &= \ 0 \implies B_2^* = 0, \\
\lambda_3 B_3^* &= 13 \implies B_3^* = \frac{13}{\lambda_3}, \\
\lambda_4 B_4^* &= \ 2 \implies B_4^* = \frac{2}{\lambda_4}, \\
\lambda_n B_n^* &= \ 0 \implies B_n^* = 0, \quad n = 5, 6, \ldots
\end{aligned}$$

La solution est donc :

$$\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{8k}{\pi^2}\cos\lambda_1 t \sin\frac{\pi}{L}x + \left(-\frac{8k}{\pi 3^2}\cos\lambda_3 t + \frac{13}{\lambda_3}\sin\lambda_3 t\right)\sin\frac{3\pi}{L}x \\
+ \frac{2}{\lambda_4}\sin\lambda_4 t \sin\frac{4\pi}{L}x + \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{5^2}\cos\lambda_5 t \sin\frac{5\pi}{L}x - \frac{1}{7^2}\cos\lambda_7 t \sin\frac{7\pi}{L}x\right. \\
\left. + \frac{1}{9^2}\cos\lambda_9 t \sin\frac{9\pi}{L}x - \frac{1}{11^2}\cos\lambda_{11} t \sin\frac{11\pi}{L}x + \cdots\right)
\end{aligned}$$

où $\lambda_n = cn\pi/L$. □

Problème de la chaleur en dimension 1

Considérons une tige mince de longueur L, de conductivité thermale k, de chaleur spécifique σ et de densité linéaire ρ, isolée sur sa longueur

Tige mince de longueur L isolée sur sa longueur.

D'après la loi newtonienne de l'écoulement de la chaleur, la température de la tige $u(x,t)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles :

(1) $$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad c^2 = \frac{k}{\sigma\rho}.$$

Trouver $u(x,t)$ si la température aux bouts est zéro (C.L.) :

(2) $$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

et la température initiale (C.I.) est

(3) $$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

RÉSOLUTION. (Trois étapes)

ÉTAPE 1. LA SÉPARATION DES VARIABLES. Posons $u(x,t) = F(x)G(t)$

En remplaçant dans (1), on obtient:

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -p^2 < 0$$

ainsi, on a deux équations différentielles découplées :

(4) $$F''(x) + p^2F(x) = 0,$$

(5) $$\dot{G}(t) + c^2p^2G(t) = 0.$$

ÉTAPE 2. LES FONCTIONS PROPRES. Les fonctions propres $u_n(x,t)$ sont les solutions non nulles de l'é.d.p. (1) et des C.L. (2). De (4) on obtient

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$

et de (2) $$F(0) = A = 0$$

et $$F(L) = B\sin pL = 0 \implies pL = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

D'où les valeurs de p :

$$\boxed{p_n = \frac{n\pi}{L}.}$$

Donc

$$\boxed{F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

De même, de (5) on a

$$\boxed{\dot{G}_n(t) + \lambda_n^2 G_n(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L},}$$

d'où $$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}.$$

On a donc les fonctions propres et les valeurs propres :

$$u_n(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ÉTAPE 3. On satisfait la condition initiale par superposition des fonctions propres

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

pour que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x).$$

Puisque $u(x,0)$ est représenté par le développement de Fourier de sinus de la fonction $f(x)$, alors

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Exemple 2.5. Trouver la température $u(x,t)$ d'une tige de longueur $L = 2\pi$, isolée latéralement, aux conditions aux limites nulles :

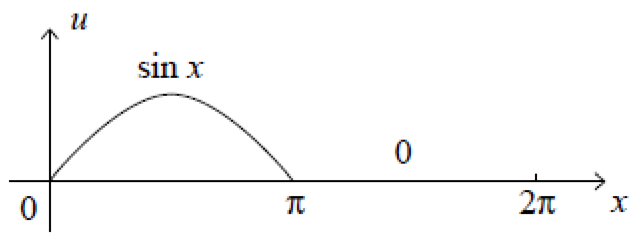
$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

et à la condition initiale :

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Prendre $c^2 = 25$.

Résolution.



Puisque la température est nulle aux bouts, on sait que les valeurs propres sont :

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} = \frac{5n\pi}{2\pi} = \frac{5n}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

et que la solution est la superposition des fonctions propres correspondantes :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}.$$

De la condition initiale, on obtient

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x).$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)].$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\frac{n\pi}{2\pi}x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin\frac{n}{2}x\,dx. \end{aligned}$$

on a, si $n \neq 2$,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[-\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)x + \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)x\right]dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2}{n+2}\sin\frac{n+2}{2}x\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n-2}\sin\frac{n-2}{2}x\Big|_0^{\pi}\right] \\ &= \frac{2}{2\pi}\left[-\frac{1}{n+2}\sin\left(\frac{n}{2}+1\right)\pi + \frac{1}{n-2}\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi\right]. \end{aligned}$$

Donc pour n pair, $n \neq 2$: $\qquad B_n = 0.$

Pour $n = 4k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, (c'est-à-dire pour $n = 1, 5, 9, \ldots$),

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+2}(-1) + \frac{1}{n-2}(-1)\right] \\ &= -\frac{4}{\pi(n^2-4)}, \end{aligned}$$

et pour $n = 4k+3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, (c'est-à-dire pour $n = 3, 7, 11, \ldots$),

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+2}(+1) + \frac{1}{n-2}(+1)\right] \\ &= \frac{4}{\pi(n^2-4)}. \end{aligned}$$

Enfin, pour $n = 2$,

$$B_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(-\cos 2x + 1)\,dx = \frac{1}{2}.$$

La solution est donc

$$u(x,t) = -\frac{4}{\pi(-3)}\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{-25t/4} + \frac{1}{2}\sin x\, e^{-25t} + \frac{4}{5\pi}\sin\left(\frac{3x}{2}\right)e^{-225t/4} - \ldots$$

Fin