

1. Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes:

(a) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$

(b) $f(x, y) = \frac{\arcsin x}{\arcsin y}$

(c) $f(x, y) = \ln \frac{x}{1-x^2-y^2}$

(d) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

(e) $f(x, y) = \ln(2x + y - 2)$

2. Trouver les limites suivantes:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1+y^2) \sin x}{x}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

3. On donne la fonction de deux variables réelles $f(x, y) = \arcsin(x - y)$ et soit la fonction réelle de la variable réelle t , $g(t) = t^2 - 1$

(a) Trouver $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} g \circ f(x, y)$

(b) Utiliser la règle de chaîne pour calculer les dérivées partielles de $h(x, y) = g \circ f(x, y)$

4. Soit $f(x, y) = x^2 - y^2$. on suppose que x et y sont fonctions des variables u et v :

$$x(u, v) = e^u \sin v \quad ; \quad y(u, v) = e^{-u} \cos v$$

Sans exprimer f en termes de u et v , trouver en utilisant la règle de chaîne, les dérivées partielles premières, par rapport à u et v de $f(x(u, v), y(u, v))$

5. Etudier la continuité à l'origine de chacune des fonctions suivantes:

(a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^{12}+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

6. Soit f une fonction de deux variables réelles définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue en $(0, 0)$

(b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ puis $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$

(c) f est-elle de classe C^1 en $(0, 0)$?

7. Trouver le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $A(1, 1)$ de la fonction $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$ en déduire l'équation du plan tangent à $(S) : z = f(x, y)$ au point $(1, 1, 1)$.

8. Soit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 2$$

(a) Déterminer les extremums relatifs de f

(b) Etudier les extremums de f , d'abord sur la droite $x = -1$ et ensuite sur la droite $y = 2$. Commenter!

9. Etudier les extremums locaux de f , en vérifiant s'il s'agit d'un extremum global, dans chacun des cas suivants:

a) $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ b) $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$ c) $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$

10. Calculer dans chaque cas les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f :

a) $f(x, y) = \ln(xy)$ b) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ c) $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$ d) $f(x, y) = y^x$

e) $f(t, \alpha) = \cos(2\pi t - \alpha)$ f) $f(P, V, \delta, \nu, g) = PV + \frac{V\delta\nu^2}{2g}$

11. Soit

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3} & \text{si } x^3 + y^3 + z^3 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^3 + y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$$

Montrer que f_x, f_y et f_z existent en $(0, 0, 0)$ mais que f n'est pas différentiable en $(0, 0, 0)$

12. Soit $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$

(a) Calculer $df(1, 1)$

(b) En déduire une valeur approximative de $f(1.01, 0.9)$

13. Trouver le maximum absolu et le minimum absolu de $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ à l'intérieur du domaine D formé du triangle $o(0, 0), A(1, 0), B(0, 2)$ et de son intérieur. Déterminer les points de D qui correspondent à ces valeurs extrémales de f

14. Déterminer les courbes de niveau données par les fonctions suivantes:

(a) $f(x, y) = 3 - x - 3y$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$

15. Déterminer les surfaces de niveau données par les fonctions suivantes:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

16. Trouver l'équation du plan tangent ainsi que l'équation de la droite normale à la surface $(S) : z = x^2 - 2y^2 - 6$ au point $P(1, 0, -5)$
