Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Durée:1h30
Partiel
2017-2018

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de:
Beyrouth-Baakline-Baalbek-Ghazza-Tripoli-Bickfaya
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Partiel
Application de l'analyse à la géométrie - MVA006

1. ($25\,pts$) On considère la fonction réelle à deux variables réelles

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$?

   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f d'abord au point $(0,0)$ ensuite en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

   (c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.

Solution:

a) Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a $x^2+y^2 \neq 0$ et $f(x,y)$ est continue comme étant la fraction de deux fonctions continues avec un denominateur non nul $\boxed{\text{1pt}}$. Il reste à vérifier la continuité en $(0,0)$:

<u>première méthode:</u>

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|x^3y|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|xy|}{x^2} \leq |xy|$$

et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$, d'où f est continue en $o(0,0)$.

<u>deuxième méthode:</u> par passage en coordonnées polaires

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin\theta = 0 = f(0,0), \quad \forall\theta \ \boxed{\text{3pt}}.$$

donc f est continue en $o(0,0)$ et pasuite f est continue sur $\mathbb{R}^2$.$\boxed{\text{1pt}}$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ $\boxed{\text{3pts}}$.et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$ $\boxed{\text{3pts}}$.

Soit $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(xy) = x^2 y \dfrac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\boxed{\text{3pts}}$.et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\boxed{\text{3pts}}$.

c) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} x^2 y \frac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} r[\cos^2\theta \sin\theta(\cos^2\theta + 3\sin\theta)] = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ \forall \theta$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en $(0,0)$ $\boxed{\text{2pts}}$. Aussi $x^2+y^2 \neq 0\ \ \forall (x,y) \neq (0,0)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en tout point différent de $(0,0)$ comme fraction de deux fonctions continues avec un dénominateur non nul.$\boxed{\text{1pt}}$.

De même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x^3 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} r[\cos^3\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)] = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ \ \forall \theta$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est continue en $(0,0)$ $\boxed{\text{2pts}}$.. Aussi $x^2+y^2 \neq 0\ \forall (x,y) \neq (0,0)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est continue en tout point différent de $(0,0)$ comme fraction de deux fonctions continues avec un dénominateur non nul $\boxed{\text{1pt}}$.. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles d'ordre un qui sont coninues sur $\mathbb{R}^2$ et parsuite f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.$\boxed{\text{2pt}}$.

---

2. (25 pts) Soit la fonction $f(x,y) = x[(\ln(x))^2 + y^2]$.

   (a) Déterminer, D, le domaine de définition de f

(b) Chercher dans D, les points critiques de f

(c) Étudier l'existence et déterminer la nature des extremums locaux dans D.

Solution:

a) $D =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ $\boxed{\text{3pts}}$.

b) Les points critiques de f sont donnés par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 2\ln x + y^2 + \ln^2 x & = & 0 \\ 2xy & = & 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{4pts=2+2}}.$$

comme $x > 0$ alors $y = 0$ et donc $\ln x(2 + \ln x) = 0$, ains les points critiques sont

$$M(1,0),\ N(e^{-2},0) \quad \boxed{\text{3pts+3pts}}.$$

c)Soit $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$ $\boxed{\text{2pts}}$., $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$ $\boxed{\text{2pts}}$., $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$ $\boxed{\text{2pts}}$.soit

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = 4[1 + \ln x - y^2] \quad \boxed{\text{2pts}}.$$

$D(1,0) = 4 > 0$ et $A(1,0) = 2 > 0$ donc M est un minimum local $\boxed{\text{2pts}}$. et $D(e^{-2},0) = -4 < 0$ donc N est un point de selle $\boxed{\text{2pts}}$.

---

3. (50pts)

(a) On considère l'integralle doube $I = \int\int_D xydxdy$ où D est le domaine borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$$

On pose $x = r\cos^3\theta$ et $y = r\sin^3\theta$.

1. Exprimer $dxdy$ en fonction de $d\theta dr$
2. Exprimer le domaine D en fonction de r et θ
3. Utiliser ce changement de variables pour calculer I sachant que $\int \cos^5 x \sin^5 x dx = \frac{5}{3072}\cos 6x - \frac{5}{512}\cos 2x - \frac{1}{5120}\cos 10x$.

Solution:

1) $J(r,\theta) = \begin{vmatrix} -3r\sin\theta\cos^2\theta & \cos^3\theta \\ 3r\cos\theta\sin^2\theta & \sin^3\theta \end{vmatrix} = -3r\sin^2\theta\cos^2\theta$ donc

$$dxdy = 3r\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta dr \quad \boxed{\text{4pts}}.$$

2) $x \geq 0$ et $y \geq 0$ donc $\cos\theta \geq 0$ et $\sin\theta \geq 0$ c'est à dire $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Aussi $x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1$ implique que $r \leq 1$. D'où

$$D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1] \quad \boxed{\text{6pts}}.$$

3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2\cos^3\theta\sin^3\theta(3r\sin^2\theta\cos^2\theta)dr \overset{\text{Fubini}}{=} 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin^5\theta d\theta \times \int_0^1 r^3 dr$ $\boxed{\text{6pts}}$. $= \frac{1}{80}$.$\boxed{\text{4pts}}$.

(b) On considère l'integralle doube $J = \int\int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)dxdy$ où D est le domaine borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

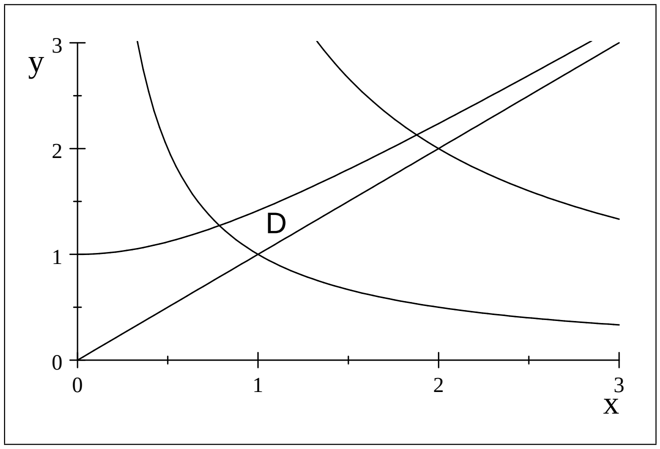
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < x < y,\ 1 < xy < 4,\ y^2 - x^2 < 1\}$$

On pose $u = xy$ et $v = y^2 - x^2$

1. Illustrer D par une figure dans le plan porté par xoy
2. Exprimer $J(x,y) = \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ en déduire <u>**en fonction de** x, y</u> le jacobien$J(u,v) = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$
3. Que devient le domaine D dans le repère uov
4. Utiliser ce changement de variables pour calculer I.

Solution:

1)$\boxed{\text{3pts}}$.



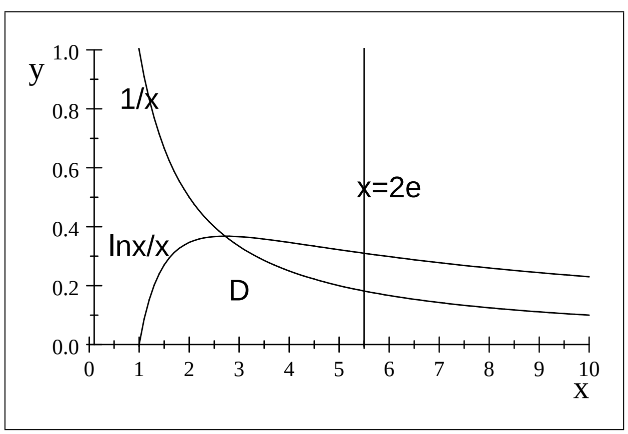
2) $J(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 2(x^2+y^2)$ $\boxed{3\text{pts}}$.et donc $J(u,v) = \dfrac{1}{2(x^2+y^2)}$ $\boxed{2\text{pts}}$.

3) $D =]1,4[\times]0,1[$ $\boxed{4\text{pts}}$.

4) $I = \int_1^4 du \int_0^1 v^u (x^2+y^2) \dfrac{1}{2(x^2+y^2)} dv$ $\boxed{4\text{pts}}$. $= \frac{1}{2}\int_1^4 du \int_0^1 v^u dv$ $\boxed{2\text{pts}}$. $= \frac{1}{2}\int_1^4 \left[\frac{v^{u+1}}{u+1}\right]_0^1 du = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{du}{u+1} = \frac{1}{2}\ln(u+1)]_1^4 = \frac{1}{2}(\ln\frac{5}{3})$.$\boxed{2\text{pts}}$.

(c) On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ \ 0 < y < \frac{\ln x}{x},\ y < \frac{1}{x},\ \ x < 2e\}$$



Calculer l'aire de D.

Solution:

$A(D) = \int_1^e dx \int_0^{\ln x/x} dy + \int_e^{2e} dx \int_0^{1/x} dy$ $\boxed{\text{4pts}}$. $= \int_0^e \frac{\ln x}{x} dx + \int_e^{2e} \frac{1}{x} dx$ $\boxed{\text{2pts}}$. $= \frac{1}{2}(\ln x)^2]_0^e + \ln x]_e^{2e} = \frac{1}{2} + \ln 2.$ $\boxed{\text{2pts}}$.

Noter que le point de recontre de deux courbes est $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}$ donc $\ln x = 1$ et $x = e.$ $\boxed{\text{2pts}}$.