Chapitre 8
COURBES EN POLAIRES

Enoncé des exercices

1 Les basiques

Exercice 8.1 *Reconnaître et tracer les graphes des courbes d'équation polaires*

$$1)\quad \rho = \frac{1}{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)} \qquad 2)\quad \rho = \frac{5}{4\cos\theta + 3\sin\theta}$$

$$3)\quad \rho = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \qquad 4)\quad \rho = 2\cos\theta - 3\sin\theta$$

Exercice 8.2 *On considère la cardioïde d'équation* $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$*. Tracer rapidement son support, préciser la tangente au point* $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 8.3 *Tracer la courbe d'équation polaire* $\rho = \cos 2\theta$

Exercice 8.4 *On considère l'arc paramétré défini en coordonnées polaires par*

$$\rho(\theta) = \cos 2\theta + \cos^2\theta$$

On note $\mathcal{C}$ *la courbe représentative associée.*

1. *Quelle est la périodicité* T *de* ρ *?*
   Si on trace le support de l'arc lorsque θ *décrit un intervalle de largeur* T*, quelle transformation géométrique doit-on effectuer ensuite afin d'obtenir* $\mathcal{C}$ *en entier ?*
2. *Quelle est la parité de* ρ *?*
   Si on trace le support de l'arc lorsque θ *décrit* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*, quelles transformations géométriques doit-on effectuer ensuite afin d'obtenir* $\mathcal{C}$ *en entier ?*
3. *Pour quelle valeur de* $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *a-t-on* $\rho(\theta_0) = 0$ *? (On exprimera le résultat avec la fonction* arccos*).*
   Dresser le tableau de signe de ρ *sur l'intervalle* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. *Tracer la courbe* $\mathcal{C}$*. Préciser les tangentes verticales et horizontales (en les justifiant).*
5. *La courbe* $\mathcal{C}$ *est symétrique par rapport à* Oy*, quelle propriété de* ρ *cela traduit-il ?*
6. *Quelle est la tangente en* $M(\theta_0)$ *? Donner un procédé géométrique pour la tracer (avec la règle et le compas).*

Exercice 8.5 *Etudier la courbe d'équation polaire* $\rho = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$*, on précisera la branche infinie.*

Exercice 8.6 *Tracer la courbe de représentation polaire* $\rho(\theta) = \cos(3\theta) - 2$.

Exercice 8.7 *Tracer le support de l'arc paramétré défini en coordonnées polaires par* $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} + \cos^2\theta$*. On calculera la valeur exacte pour laquelle la tangente à la courbe est perpendiculaire à* OM*.*

Exercice 8.8 *Tracer la courbe de représentation polaire* $\rho(\theta) = \cos^2\theta$*. On prendra soin de réduire l'intervalle d'étude. Pour quelle valeur de* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*, la tangente est-elle horizontale ?*

Exercice 8.9 *Etudier la courbe d'équation polaire* $\rho(\theta) = \tan\theta$*.*

Exercice 8.10 *Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe* Θ *(Théta majuscule) d'équation polaire*

$$\rho(\theta) = 1 + \cos^2\theta$$

1. *Tracer la courbe en repère orthonormé. Préciser les points à tangente horizontale.*
2. *Soit* M *de paramètre* θ *et* V *l'angle entre la tangente en* M *et la droite* (OM)*.*
   (a) *Pour quelles valeurs de* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *a-t-on* $V = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ *? Où se situe* $M(\theta)$ *dans ce cas et quelle est alors la tangente en* M *?*
   (b) *Exprimer* $\tan V$ *en fonction de* θ *lorsque* $V \neq \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$*.*
   (c) *Soit* A *le point de paramètre* $\dfrac{\pi}{4}$*. On note* α *l'angle entre l'axe* Ox *et la tangente en* A*. Calculer* $\tan\alpha$*. En déduire une équation cartésienne de la tangente en* A *à la courbe* Θ*.*
   (d) *Question bonus : Soit* B *le point de paramètre* $\theta = \dfrac{\pi}{2}$*, montrer que la tangente en* B *recoupe* Θ *en deux autres points* C *et* D *de paramètre* $\gamma \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *et* $\delta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$*.*
   Exprimer γ *à l'aide de la fonction* arcsin*. Préciser les coordonnées de* C*. (On pourra utiliser le nombre* $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *qui est racine de* $X^2 = X + 1$*)*

2 Les techniques

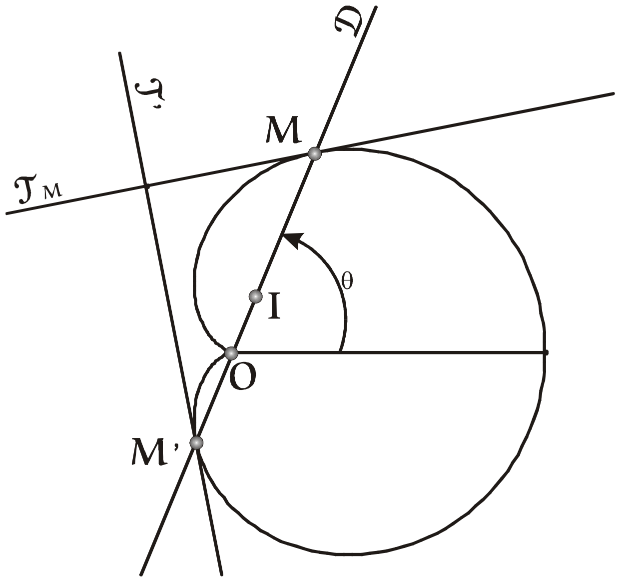
Exercice 8.11 *Etudier la lemniscate de Bernoulli définie par* $\rho(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}$*.*

Exercice 8.12 *Soit* $\mathcal{C}$ *la cardioïde d'équation polaire* $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ *en repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$*. Un droite variable* $\mathcal{D}$ *passant par l'origine* O *du repère coupe, en général,* $\mathcal{C}$ *en deux autre points* M *et* M'*. On considèra que si* $\mathcal{D}$ *est l'axe* Ox *alors* $\mathcal{D}$ *recoupe bien en* $\mathcal{C}$ *en deux autres points dont l'un des deux est* O *(ce qui revient à voir* O *comme un point double). On notera* θ *l'angle que fait* $\mathcal{D}$ *avec l'axe* Ox*.*

1. *Si* M *a pour coordonnées polaires* (ρ, θ)*, exprimer* $\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{OM'}$ *à l'aide de* $\cos\theta$ *et de* $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$*.*
2. *Montrer que la distance* MM' *est constante.*
3. *Montrer que le milieu* I *de* $[M, M']$ *décrit un cercle (on pourra déterminer* $\overrightarrow{OI}$*).*

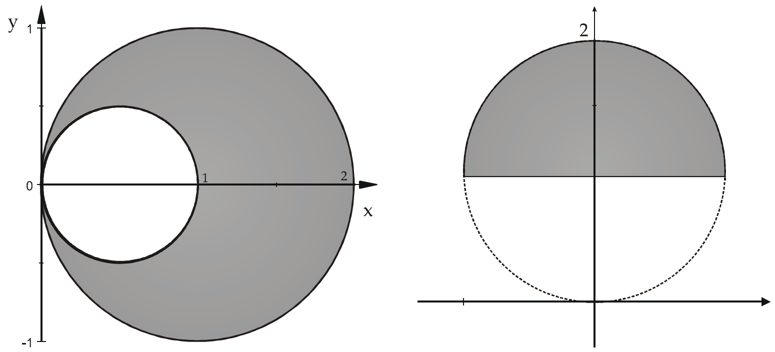
Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

4. Montrer que les tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ à $\mathcal{C}$ issues de M et de M' sont perpendiculaires.



3 Le grenier

Exercice 8.13 *Décrire les ensembles gris en polaire*



Exercice 8.14 *Tracer* $\rho^2(\theta) = \dfrac{1}{\sin 2\theta}$ *(rép : on a* $\rho^2 \sin 2\theta = 2\rho\cos\theta \times \rho\sin\theta$ *ce qui donne* $2xy = 1$, *hyperbole)*

Exercice 8.15 *Tracer* $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$ *(rép : cela donne* $\rho = \dfrac{\rho}{\rho\cos\theta} + \dfrac{\rho}{\rho\sin\theta}$ *soit en simplifiant par* ρ *qui n'est jamais nul* $1 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \Longrightarrow x + y = xy$*)*

Exercice 8.16 *Tracer* $\rho = \dfrac{3}{1 + 2(\cos\theta + \sin\theta)}$ *(conique)*

Exercice 8.17 *Tracer* $\rho = \dfrac{2}{4 + \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$

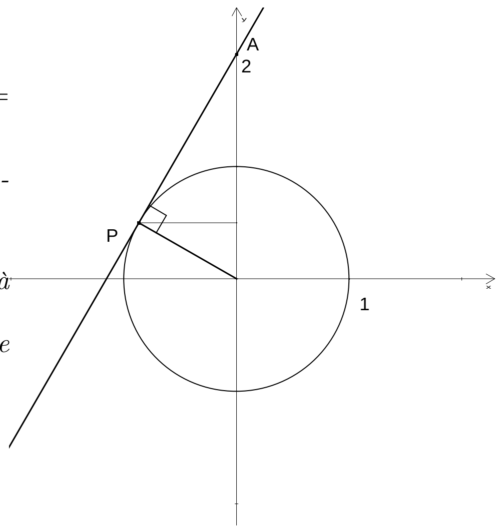
Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Chapitre 8
COURBES EN POLAIRES

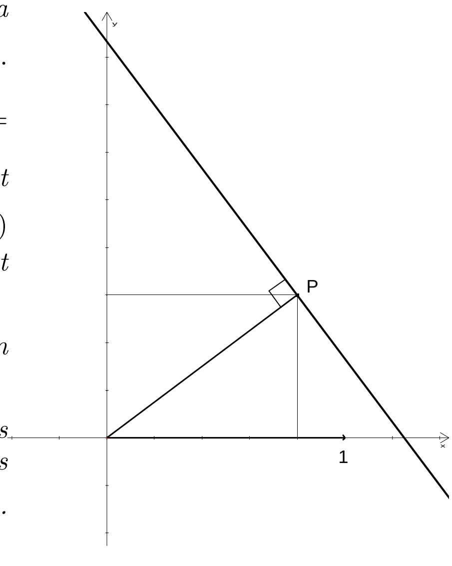
Solution des exercices

1 Les basiques

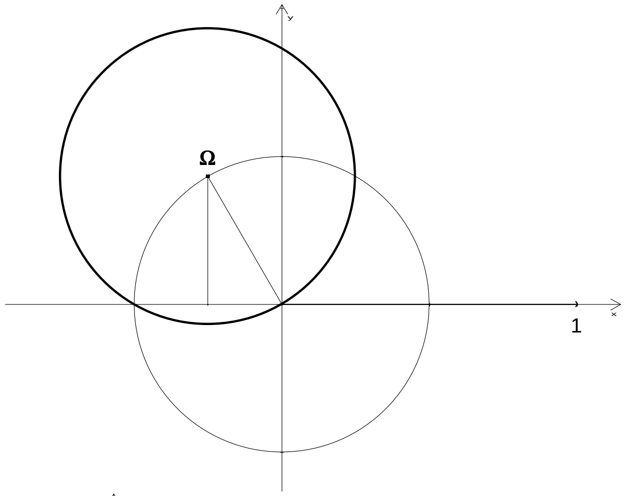
Exercice 8.1 *Pour 1), on a* $\dfrac{1}{\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)} = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{5\pi}{5}-\theta\right)} = \dfrac{1}{\cos\left(\theta-\dfrac{5\pi}{6}\right)}$*. Il s'agit donc de la droite passant par P de coordonnées polaires* $\left(1, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ *et perpendiculaire à* $\overrightarrow{OP}$*. (Avec* $\theta=\dfrac{\pi}{2}$*, on* $\rho = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)} = 2$*, elle passe donc par le point de coordonnées* $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$*).*



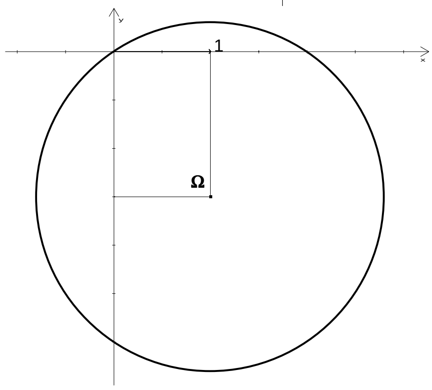
Pour 2), On sait qu'il s'agit d'une droite d'après le cours. On a $4\cos\theta + 3\sin\theta = G\left(\dfrac{4}{G}\cos\theta + \dfrac{3}{G}\sin\theta\right)$ *où* $G = \sqrt{4^2+3^2} = 5$*. Soit φ tel que* $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}$*,* $\sin\varphi = \dfrac{3}{5}$*, alors* $\dfrac{5}{4\cos\theta+3\sin\theta} = \dfrac{1}{\cos(\theta-\varphi)}$*. La courbe d'équation polaire* $\rho = \dfrac{5}{4\cos\theta+3\sin\theta}$ *est donc la droite passant par le point P de coordonnées polaire $(1,\varphi)$ et perpendiculaire à $\overrightarrow{OP}$. Les coordonnées cartésiennes de P sont* $\begin{pmatrix} 1\times\cos\varphi \\ 1\times\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ \\ \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}$*, ce qui permet de tracer cette droite. On peut aussi avoir son équation en car si M, de coordonnées polaires (ρ,θ) et de coordonnées cartésiennes (x,y), est sur la droite alors* $\rho = \dfrac{5}{4\cos\theta+3\sin\theta} \iff 4\rho\cos\theta + 3\rho\sin\theta = 5 \iff 4x+3y=5$*.*
L'équation de la droite est donc $4x+3y=5$



Pour 3), on a $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = 2 \times \frac{1}{2}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$. *Il s'agit donc du cercle de rayon* $\frac{1}{2}$*, de centre* Ω *de coordonnées polaires* $\left(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

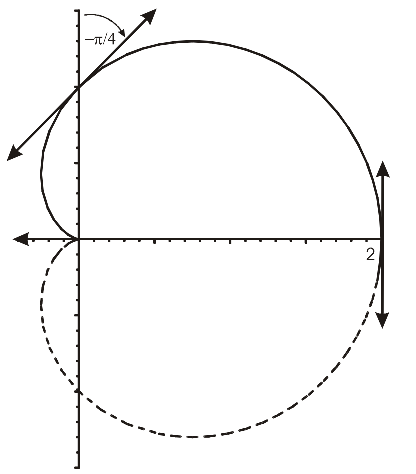


Enfin pour 4) on sait que c'est un cercle passant par O *et dont les coordonnées cartésiennes du centre sont* $\begin{pmatrix} \frac{2}{2} \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. *Avec* $\theta = 0$ *et* $\theta = \frac{\pi}{2}$*, on voit que ce cercle passe par les points de coordonnées* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.



Exercice 8.2

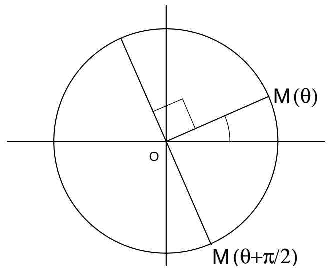
La fonction ρ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et* 2π *périodique, ainsi* $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. *On est donc certain d'avoir tout l'arc paramétré si* θ *décrit un intervalle de largeur* 2π. *On exploite ensuite les propriétés de* ρ *pour réduire l'intervalle d'étude. La parité de* ρ *permet d'affirmer que* $M(-\theta)$ *est le symétrique de* $M(\theta)$ *par rapport à* Ox. *On se limite donc à* $\theta \in [0, \pi]$, *puis on fait une refléxion (symétrie orthogonale) par rapport à* Ox. *La fonction* ρ *est décroissante sur cette intervalle (on peut dériver si on veut, on a alors* $\rho'(\theta) = -\sin\theta$*, ce qui permet de prouver que la tangente en* $\theta = 0$ *est perpendiculaire à* $\overrightarrow{u_0}$ *ou à* $\overrightarrow{OM(0)}$*). On a* $\rho > 0$ *sur* $[0, \pi[$ *et* $\rho(\pi) = 0$*, la tangente en* $M(\pi)$ *est donc dirigée par* $\overrightarrow{u_\pi}$.
On peut donc tracer le support de l'arc :



Pour la tangente, on a $\tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$ *si* $\rho'(\theta) \neq 0$*, d'où* $\tan V = \frac{1 + \cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = -\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ *d'où* $V = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ *si* $\theta \neq 0\ (\pi)$. *En particulier si* $\theta = \frac{\pi}{2}$*, on a* $V = -\frac{\pi}{4} = \left(\widehat{OM\left(\frac{\pi}{2}\right), T}\right)\ (\pi)$ *où* T *est la tangente, cette dernière est donc parallèle à la première bissectrice (droite* $y = x$*).*

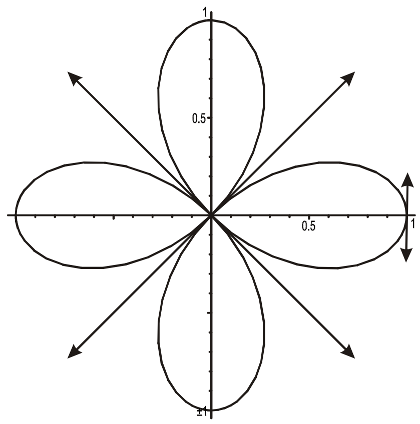
Exercice 8.3

La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique, ainsi $M(\theta+2\pi) = M(\theta)$. On est donc certain d'avoir tout l'arc paramétré si θ décrit un intervalle de largeur 2π. On exploite ensuite les propriétés de ρ pour réduire l'intervalle d'étude.
On a $\rho(\theta+\pi) = \rho(\theta)$, ainsi $M(\theta+\pi)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à O (faire un dessin). Puis $\rho\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\rho(\theta)$, cela signifie que $M\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ se déduit de $M(\theta)$ par une rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.



Enfin $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, donc $M(-\theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à Ox. En conclusion, on se place sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on trace l'arc paramétré sur cet intervalle, puis :
On fait une symétrie par rapport à Ox (utilisation de la parité),on obtient la courbe pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
On fait une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ (utilisation de la $\frac{\pi}{2}$ antipériodicité), on obtient la courbe pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$
On fait une symétrie de centre O (utilisation de la π périodicité), on obtient la courbe pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, le dernier intervalle est bien de largeur 2π, on a donc toute la courbe.
Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a ρ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\rho'(\theta) = -2\sin(2\theta)$ d'où les variations et le tracé de l'arc :

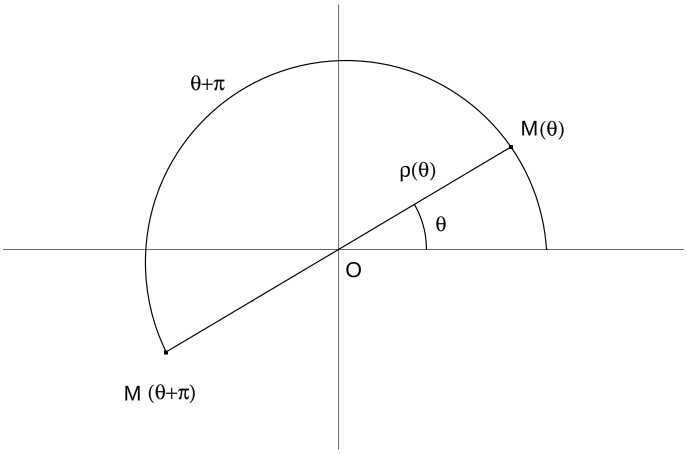
θ	0		$\dfrac{\pi}{4}$
$\rho'(\theta)$	$\underbrace{0}_{\text{tangente perpendiculaire à } OM(0)}$	$-$	
$\rho(\theta)$	1	$\searrow$	$\underbrace{0}_{\text{tangente dirigée par } \overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}}}$



Exercice 8.4

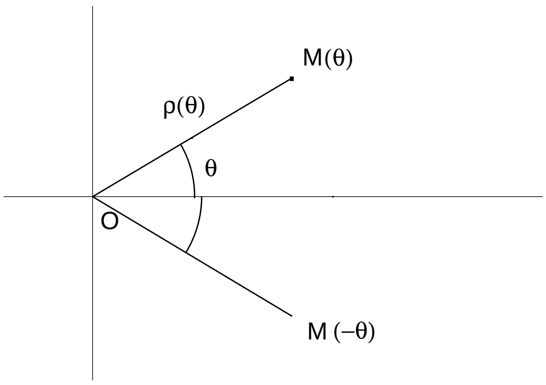
1. *La fonction ρ est 2π périodique, mais compte tenu de l'antipériodicité du cosinus*

$$\rho \text{ est } \pi \text{ périodique, } T = \pi$$



Tout d'abord $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$, on a donc toute la courbe pour t décrivant un intervalle de largeur 2π. Ensuite, le point $M(\theta + \pi)$ se déduit de $M(\theta)$ par la symétrie de centre O (cf schéma). Si on trace le support de l'arc lorsque θ décrit un intervalle de largeur π, puis que l'on fait une symétrie centrale de centre O, on obtient tout le support de M.

2. *Il est immédiat que ρ est paire.*



Le point $M(-\theta)$ se déduit de $M(\theta)$ par la symétrie orthogonale d'axe Ox. Si on trace le support de l'arc lorsque θ décrit $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il faut ensuite

1) faire une symétrie orthogonale d'axe Ox (on obtient la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

2) faire une symétrie de centre O (on obtient la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ qui est de largeur π)

3. *On a*

$$\rho(\theta) = \cos 2\theta + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 3\cos^2\theta - 1$$

d'où

$$\rho(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{3}$$

si on se place sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\rho(\theta) = 0 \text{ et } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Longleftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le cosinus est bijectif (il l'est sur $[0, \pi]$), il existe une unique valeur

$$\theta_0 = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Remarque : *On peut aussi écrire que*

$$\rho(\theta) = \cos 2\theta + \cos^2\theta = \cos 2\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2} = 0 \Longleftrightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{3}$$

or $2\theta \in [0,\pi]$ *(intervalle fondamental du cosinus) donc*

$$\rho(\theta) = 0 \Longleftrightarrow 2\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \Longleftrightarrow \theta = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Enfin, on peut aussi écrire que

$$\rho(\theta) = \cos 2\theta + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 \Longleftrightarrow \tan^2\theta = 2$$

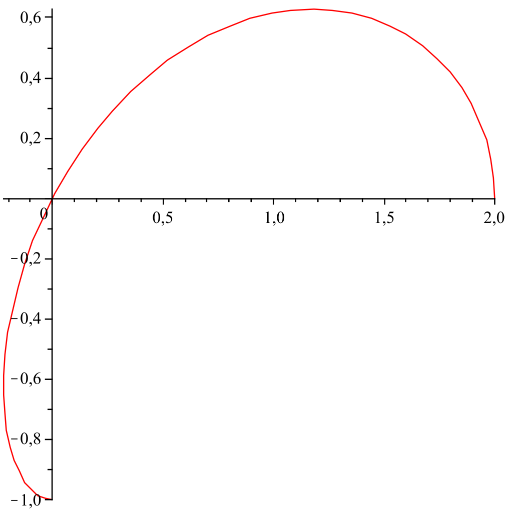
Si on cherche $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *alors* $\tan\theta > 0$ *d'où*

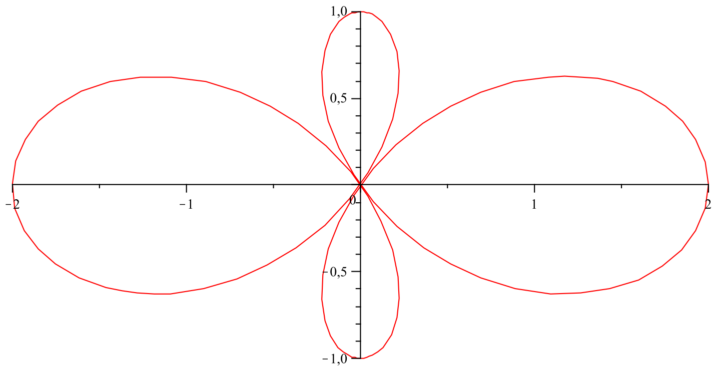
$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= 0 \Longleftrightarrow \tan\theta = \sqrt{2} \Longleftrightarrow \theta = \arctan\left(\sqrt{2}\right) \\ \text{car on a } \theta &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

On en déduit le signe de ρ. *En effet* $\rho(\theta) > 0 \Longleftrightarrow \cos^2\theta > \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \cos\theta > \frac{1}{\sqrt{3}}$ *car sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta > 0$. *Par décroissance du cosinus, on a le tableau suivant*

θ	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$
$\rho(\theta)$	2	$+$	0	$-$	-1

4. Le tracé est sans problème, ρ *est décroissante de* 2 *à* -1.





Pour préciser les tangentes horizontales et verticales, c'est un peu plus technique, on va y répondre sans alourdir la solution par un excès de rigueur. Avant toute chose, on remarque qu'il y a une tangente horizontale en $\theta = \frac{\pi}{2}$ (π) *et une verticale en* $\theta = 0$ (π). *Il s'agit de retrouver ces résultats.*

On sait que " $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$ *", et que si* $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$ *alors* $\alpha = V + \theta$ *, donc*

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \tan(V+\theta) = \frac{\tan V + \tan\theta}{1 - \tan V \tan\theta} = \frac{\dfrac{3\cos^2\theta - 1}{-6\cos\theta\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 - \dfrac{3\cos^2\theta - 1}{-6\cos\theta\sin\theta} \times \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} \\ &= -\frac{9\cos^2\theta - 7}{9\cos^2\theta - 1}\operatorname{cotan}\theta \end{aligned}$$

(En fait ceci n'est valable que si $V \neq \pm\frac{\pi}{2}$, $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$, *mais avec la convention* $\tan\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \infty\cdots$ *).*
On a donc une tangente horizontale si et seulement si $\alpha = 0\ (\pi)$, *i.e.* $\tan\alpha = 0$. *Sur l'intervalle* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *cela se produit lorsque* $\cos^2\theta = \dfrac{7}{9} \Longleftrightarrow \theta = \arccos\sqrt{\dfrac{7}{9}}$ *(car* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*) et lorsque* $\operatorname{cotan}\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.
On a une tangente verticale lorsque $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, *"i.e.* $\tan\alpha = \infty$*", cela se produit lorsque* $\cos^2\theta = \dfrac{1}{9} \Longleftrightarrow \theta = \arccos\dfrac{1}{3}$ *(car* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*) et lorsque* $\theta = 0$ *(*$\operatorname{cotan}\theta = \infty$*).*
Remarque : *On peut aussi écrire que* $x(\theta) = \left(\cos 2\theta + \cos^2\theta\right)\cos\theta$ *et chercher quand* $x'(\theta) = 0$ *afin d'obtenir les tangentes verticales. On obtient*

$$x'(\theta) = \left(1 - 9\cos^2\theta\right)\sin\theta$$

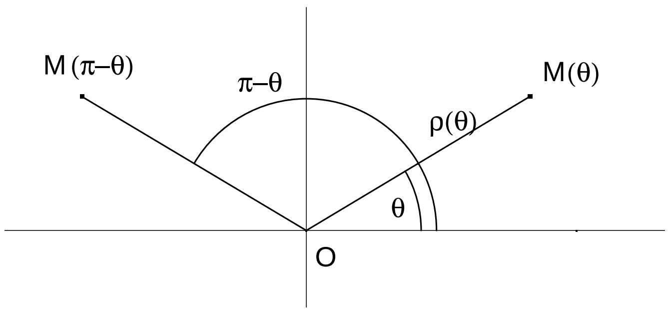
ce qui permet de retrouver les résultats.
On fait de même avec $y(\theta) = \left(\cos 2\theta + \cos^2\theta\right)\sin\theta$

$$y'(\theta) = \left(9\cos^2\theta - 7\right)\cos\theta$$

5. *On a*

$$\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$$

cette propriété se traduit par la symétrie par rapport à Oy.

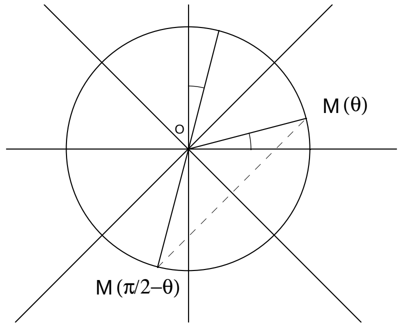


6. *D'après le cours la tangente en* $M(\theta_0)$ *est dirigée par* $\overrightarrow{u_{\theta_0}}$. *Il s'agit donc de construire l'angle* θ_0 *dont le cosinus vaut* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *Il est plus facile de construire un angle lorsque l'on dispose de la tangente. Or*

$$1 + \tan^2\theta_0 = \frac{1}{\cos^2\theta_0} = 3 \Longrightarrow \tan\theta_0 = \sqrt{2}$$

Ce qui est facile à construire (y réfléchir$\cdots$).

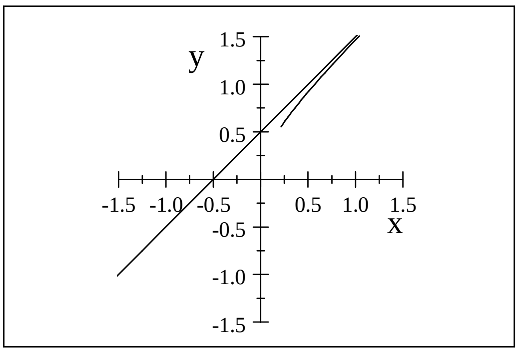
Exercice 8.5 *On a* $D_\rho = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$*, la fonction* ρ *est* 2π *périodique, ainsi* $M(\theta+2\pi)=M(\theta)$*. On est donc certain d'avoir tout l'arc paramétré si* θ *décrit un intervalle de largeur* 2π*. On exploite ensuite les propriétés de* ρ *pour réduire l'intervalle d'étude.*
On a $\rho(\theta+\pi)=-\rho(\theta)$*, donc* $M(\theta+\pi)=M(\theta)$*, il suffit donc de faire varier* θ *dans un intervalle de largeur* π *pour avoir tout le support de l'arc. On a ensuite* $\rho\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\rho(\theta)$*, ceci signifie que* $M\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ *est le symétrique de* $M(\theta)$ *par rapport à la droite* $y=-x$ *(seconde bissectrice). On peut le voir sur le dessin ci dessous, ou bien en écrivant que si* $M(\theta)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho(\theta)\cos\theta\\\rho(\theta)\sin\theta\end{pmatrix}$ *alors* $M\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\begin{pmatrix}\rho\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\\rho\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\rho(\theta)\sin\theta\\-\rho(\theta)\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}$.



On se limite donc à un intervalle de largeur $\frac{\pi}{2}$ *d'extrémité* $\frac{\pi}{4}$*, par exemple* $\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$*, puis on fait une symétrie par rapport à la seconde bissectrice.*
On peut maintenant faire l'étude de la branche infinie. Si θ *tend vers* $\frac{\pi}{4}$*, par valeurs supérieures, on a*

$$\sin\theta-\cos\theta\xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{4}^+]{}0^+\ \textit{(car } \sin\theta\geq\cos\theta \textit{ si } \theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\textit{)}$$

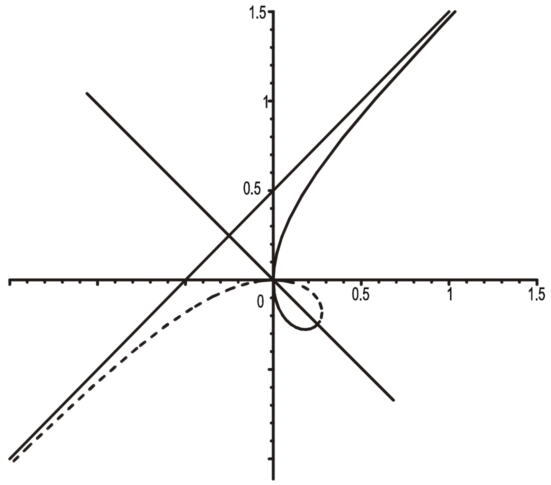
donc $x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta$ *et* $y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta$ *tendent vers* $+\infty$*. On a donc une branche infinie. On regarde alors* $\frac{y(\theta)}{x(\theta)}=\tan\theta\xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{4}^+]{}1$*, puis* $y(\theta)-x(\theta)=\rho(\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\sin\theta\cos\theta\xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{4}^+]{}\frac{1}{2}$*. On a donc une asymptote d'équation* $y=x+\frac{1}{2}$*. De plus* $y(\theta)-x(\theta)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta-1)=\frac{1}{2}(\sin(2\theta)-1)\leq 0$*, la courbe est donc toujours sous son asymptote.*



On va maintenant tracer le tableau de signe de ρ *:*
Pour $\theta\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$*, on a* $\sin\theta>\cos\theta\geq 0$ *donc* $\rho\geq 0$*. Pour* $\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$*, on a* $\cos\theta\leq 0$ *et* $\sin\theta\geq 0$ *donc* $\rho\leq 0$*.*

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
ρ	$\Vert$	$+$	$\underbrace{0}_{\textit{Tangente dirigée par } \overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}}}$	$-$	

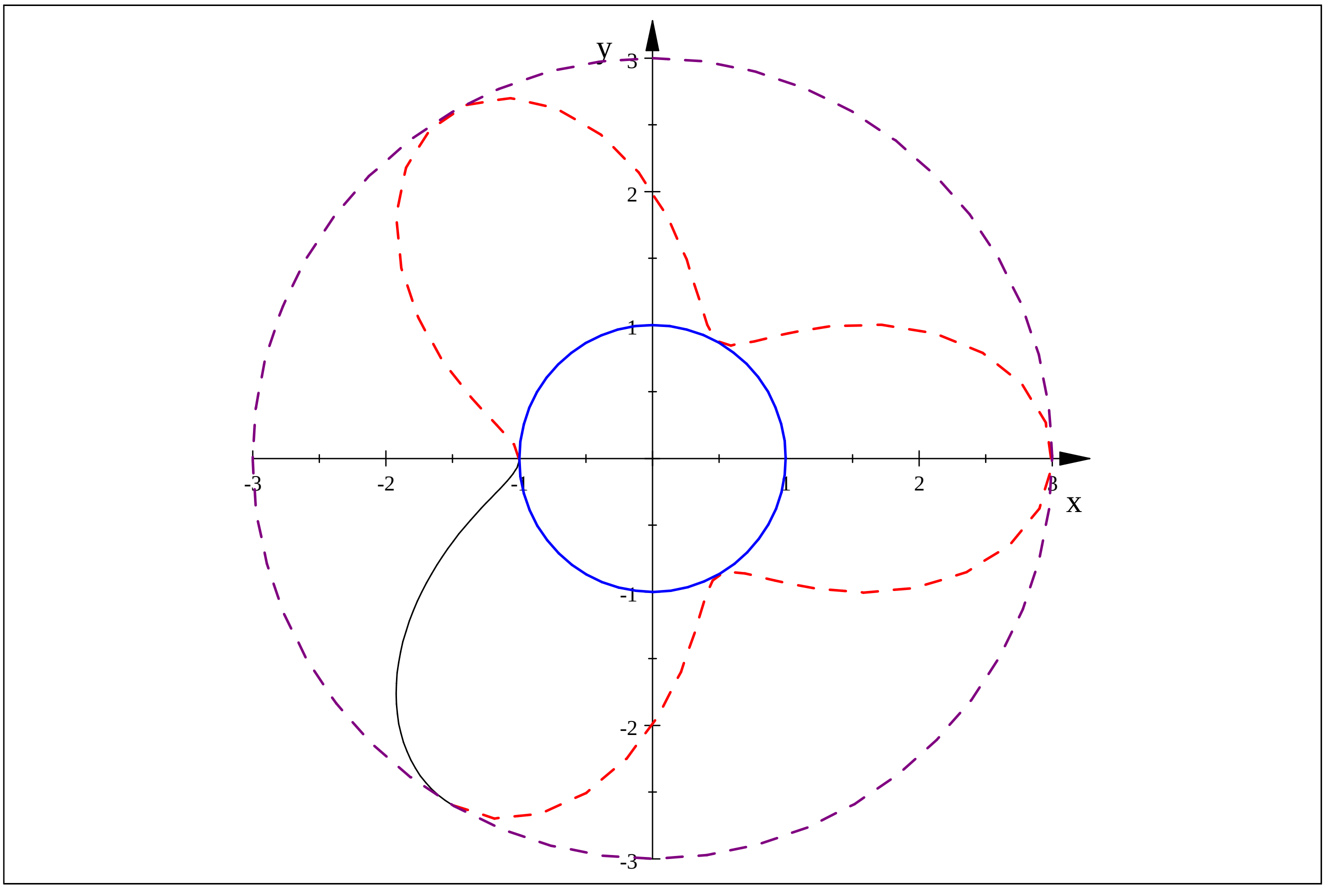
Par raisons de symétrie la tangente en $\theta=\frac{3\pi}{4}$ *est perpendiculaire à la droite* $y=-x$*. On en déduit le tracé de la* *courbe :*



Exercice 8.6 *On réduit l'intervalle d'étude, ρ est 2π périodique, il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle de longeur 2π. On a $\rho\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\rho(\theta)$, donc le point $M\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ se déduit de $M(\theta)$ par une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On se place donc sur I de longueur $\frac{2\pi}{3}$ et on fait ensuite deux rotations de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (en effet après 3 rotations, si r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, alors $r(M(\theta))=M\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)$, donc $r\circ r\circ r(M(\theta))=M\left(\theta+3\times\dfrac{2\pi}{3}\right)=M(\theta)$). Enfin ρ est paire, donc on se place sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, puis, on fait une symétrie d'axe Ox et deux rotations de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.*
Sur cette intervalle, ρ est décroissant. On a $\rho'(\theta)=-3\sin(3\theta)\Longrightarrow\rho'(0)=0$, la tangente en 0 est donc verticale. De même en $\frac{\pi}{3}$, on a $\rho'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$, la tangente est perpendiculaire à $OM\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (ceci signifie que les points $M(0)$ et $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ sont sur les cercles de rayon 1 et 3 respectivement, et qu'en ces points la courbe et les cercles sont tangents).

θ	0		$\frac{\pi}{3}$
ρ'	0	$-$	0
ρ	-1	$\searrow$	-3

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

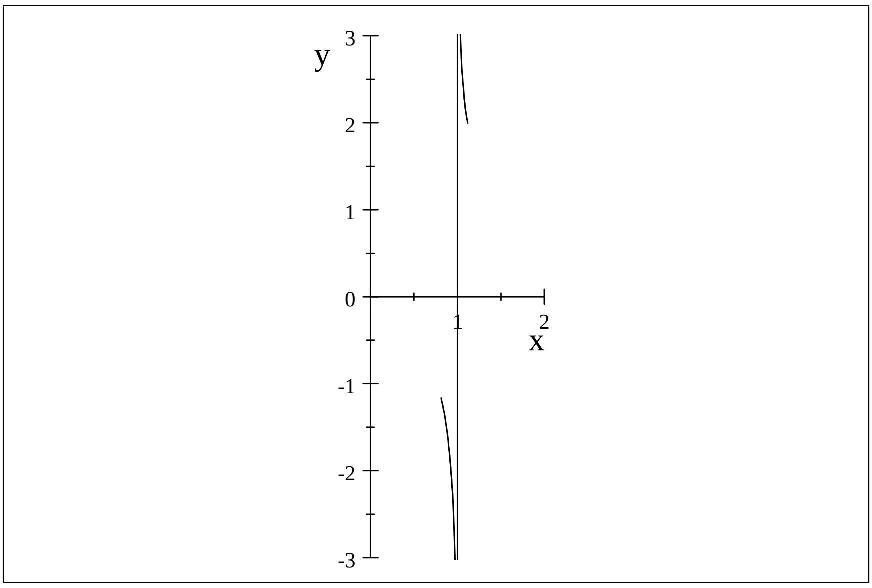


Exercice 8.7 *La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R}$ privé des $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, elle est 2π périodique, paire, donc on réduit l'intervalle d'étude à $D=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, puis on fait une symétrie par rapport à Ox.*

On a $\rho(\theta)=\dfrac{1+\cos^3(\theta)}{\cos\theta}$ est du signe de $\cos\theta$, de pus $\rho(\theta)=0\iff\theta=\pi$. On a une branche infinie en $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. On pose

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= \rho(\theta)\cos\theta = 1+\cos^3\theta \xrightarrow[\theta\to+\frac{\pi}{2}]{} 1\\
y(\theta) &= \rho(\theta)\sin\theta = \tan\theta+\sin\theta\cos^2\theta \xrightarrow[\theta\to+\frac{\pi}{2}^-]{} +\infty\\
y(\theta) &= \tan\theta+\sin\theta\cos^2\theta \xrightarrow[\theta\to+\frac{\pi}{2}^+]{} -\infty
\end{aligned}$$

On a donc une asymptote d'équation $x=1$ en $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, on est à droite de cette asymptote en $\frac{\pi}{2}^-$, à gauche en $\frac{\pi}{2}^+$.



La fonction ρ est dérivable sur D et $\rho'(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 2\cos\theta\sin\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \times \left(1 - 2\cos^3\theta\right)$. *On a donc, sur D,* $\rho'(\theta) = 0$ *si et seulement si* $\theta = 0$, $\theta = \pi$ *ou* $1 - 2\cos^3\theta$. *Or*

$$1 - 2\cos^3\theta \Longleftrightarrow \cos^3\theta = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \cos\theta = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$$

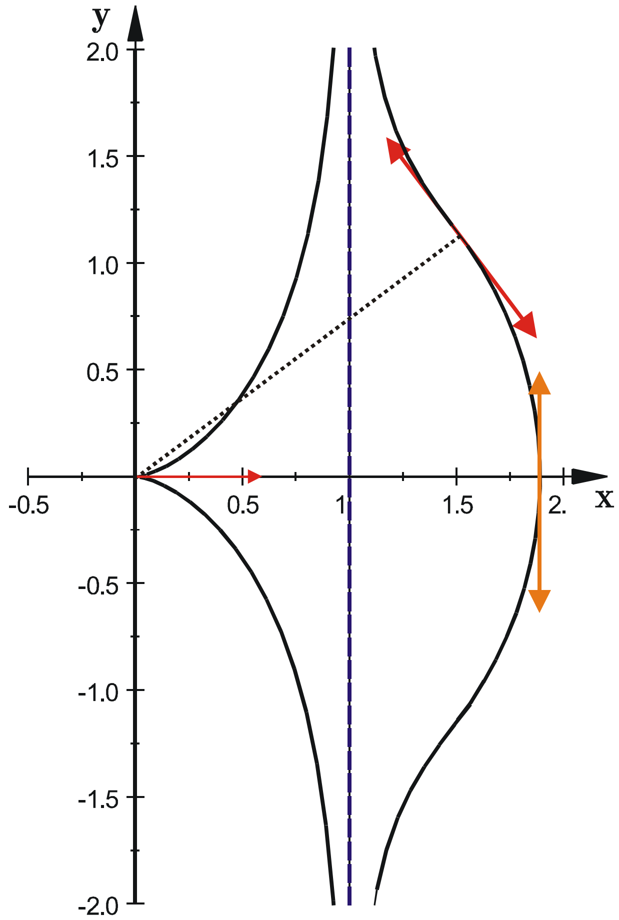
Sur D cette dernière condition est réalisée lorsque $\theta = \arccos\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ *(on notera* θ_0 *cette valeur). On a a ainsi le tableau de variations suivant :*

θ	0		θ_0			$\frac{\pi}{2}$			π
ρ'	0	$-$	0	$+$		$\|\|$		$+$	0
ρ	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}2^{\frac{1}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0

On a donc deux points à tangentes perpendiculaires à OM, en $\theta = 0$ *(*$\rho = 2$*) et* $\theta = \theta_0$*, valeur pour laquelle*

$$\rho(\theta_0) = \frac{1 + \cos^3\theta_0}{\cos\theta_0} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}} = \frac{3}{2}2^{\frac{1}{3}}$$

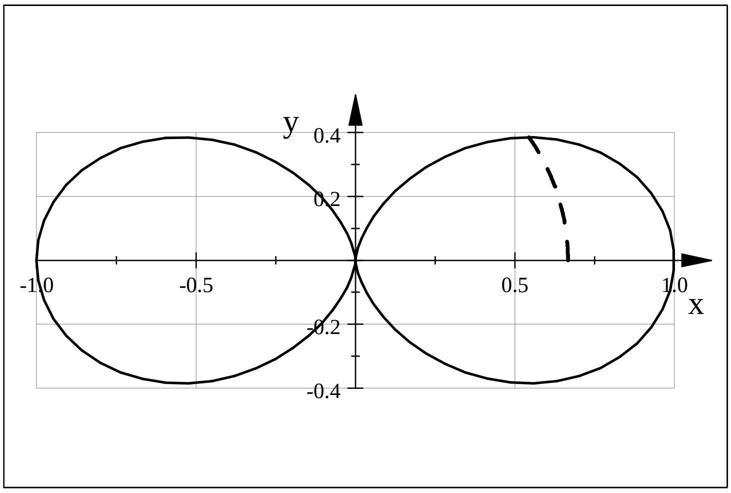
Pour $\theta = \pi$*, on a un point stationnaire, la tangente est dirigée par* $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{i}$*, c'est donc l'axe Ox. Puisque* ρ *s'annule* *en π sans changer se signe l'allure est du type rebroussement.*



Exercice 8.8 *La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R}$, elle est 2π périodique, ce qui assure que l'on a toute la courbe en étudiant ρ sur I de longueur 2π. Elle est également π périodique donc $M(\theta+\pi)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par la symétrie de centre O. Elle est également paire, donc $M(-\theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par une symétrie orthogonale d'axe Ox. En conclusion, on étudie ρ sur $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis, on fait une symétrie orthogonale d'axe Ox et une symétrie de centre O.*
Sur I, on a ρ décroissant, ρ dérivable et $\rho'(\theta)=-2\sin\theta\cos\theta$ est nul en 0 et $\frac{\pi}{2}$ On a donc les variations suivantes :

x	0		$\overline{\ \ }$ 2
′(x)	0		0
(x)	1	↘	0

En $\theta=0$, on a une tangente perpendiculaire à $\overrightarrow{u_0}$ et en $\theta=\frac{\pi}{2}$, la tangente est dirigée suivant $\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}}$. On obtient le tracé suivant



Pour avoir la tangente horizontale, on a $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}(\theta) = \dfrac{\cos^2\theta}{-2\cos\theta\sin\theta} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\dfrac{1}{2\tan\theta}$ *si* $\theta \neq 0 \ \left(\frac{\pi}{2}\right)$. *On cherche* θ *tel que* $V+\theta = 0\ (\pi)$ *(cet angle est, au vu du dessin différent de* 0 *à* $\frac{\pi}{2}$ *près). On résout donc* $\tan(V+\theta) = 0$, *ce qui donne* $\tan V + \tan\theta = 0$ *soit*

$$-\frac{1}{2\tan\theta} + \tan\theta = 0$$

En posant $t = \tan\theta \in [0, +\infty[$ *car* $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *on obtient*

$$t - \frac{1}{2t} = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ainsi

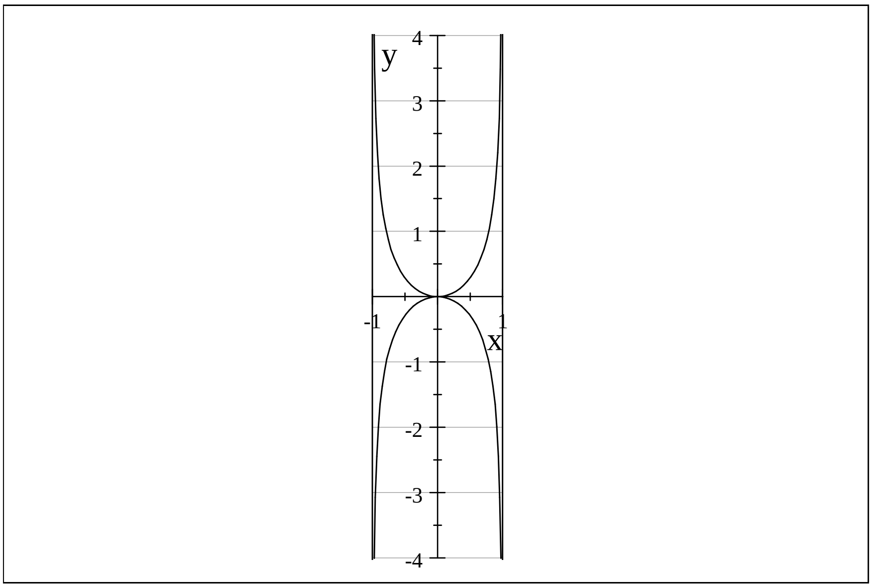
$$\theta = \arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\rho = \cos^2\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

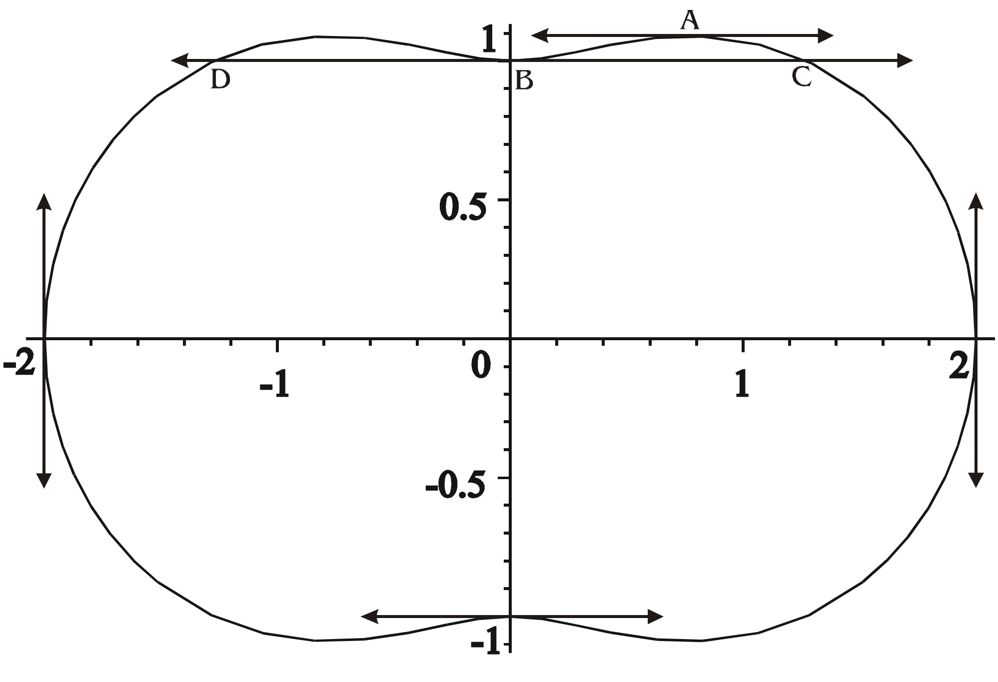
Exercice 8.9 *La fonction* ρ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *privé des* $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *où* $k \in \mathbb{Z}$. *On a facilement* $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta+\pi) = -\rho(-\theta) = \rho(\theta)$. *On en déduit que*
$M(\theta+2\pi) = M(\theta)$ *: on a donc toute la courbe lorsque* θ *décrit un intervalle de longueur* 2π.
$M(\theta+\pi)$ *est le symétrique de* $M(\theta)$ *par rapport à* O. *On prend donc* θ *dans un intervalle de longueur* π, *puis on obtient toute la courbe après une symétrie de centre* O.
$M(-\theta)$ *est le symétriqueorthogonale de* $M(\theta)$ *par rapport à* Oy. *On prend donc* θ *dans* $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *, puis on obtient toute la courbe après une symétrie orthogonale par rapport à* Oy *et une symétrie de centre* O.
On a une branche infinie lorsque θ *tend vers* $\frac{\pi}{2}^-$. *Dans ce cas* $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = \sin\theta \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}^-]{} 1^-$ *et* $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$. *On a donc une asymptote verticale.*
La fonction ρ *est dérivable sur* I *et* $\rho' = 1+\rho^2 > 0$, *donc* ρ *est croissante (ce que l'on sait bien, car l'on connaît bien la fonction tangente!!!). On a* $\rho(0) = 0$, *la tangente au point de paramètre* $\theta = 0$ *est donc dirigée par* $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{i}$, *elle est horizontale. On obtient le graphe suivant :*

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009



Exercice 8.10

1. *La fonction ρ est 2π périodique, on peut donc se limiter à une étude sur un intervalle de largeur 2π (car $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$).*
La fonction est également π périodique, cela signifie que $M(\theta + \pi)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à l'origine du repère.
On se limite donc à une étude sur un intervalle de largeur π, puis on fera une symétrie centrale de centre O.
Enfin ρ est paire, , cela signifie que $M(-\theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à l'axe Ox. On trace donc la courbe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis on fera une symétrie d'axe Ox et une symétrie de centre O. On a $\rho'(\theta) = -2\cos\theta\sin\theta = -\sin 2\theta \leq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction ρ décroît de 2 à 1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a alors le tracé suivant :



Si on désire trouver le point à tangente horizontale, on détermine les valeurs de θ qui annulent la dérivée de

$y(\theta) = (\rho(\theta)\sin\theta)$. Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} y'(\theta) &= 3\cos^3\theta - \cos\theta \\ &= \cos\theta\left(3\cos^2\theta - 1\right) \end{aligned}$$

La valeur de θ intéressante est alors $\theta = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Les coordonnées du point A du dessin ci dessus sont alors

$$A : \left(\frac{4\sqrt{3}}{9}, \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$$

On remarquera que $\dfrac{4\sqrt{6}}{9} \simeq 1,088\,7 > 1$.

2.

(a) On a $V = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ lorsque $\rho'(\theta) = 0$. Ceci donne immédiatement $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$. Le point M est alors un des points d'intersection de la courbe avec les axes. Plus précisement si $\theta = 0$, on a $M(0) : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la tangente est verticale d'équation $x = 2$. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $M(0) : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la tangente est horizontale d'équation $y = 1$.

(b) Dans ce cas $\tan V = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = -\dfrac{1+\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

(c) On a $\alpha = V + \theta$ donc $\tan\alpha = \dfrac{\tan V + \tan\theta}{1 - \tan V\tan\theta}$. Ici $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc $\tan\theta = 1$ et $\tan V = -\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1} = -\dfrac{3}{2}$. En définitive,

$$\tan\alpha = \frac{1-\dfrac{3}{2}}{1+\dfrac{3}{2}} = -\frac{1}{5}$$

Les coordonnées de A sont $\left(\rho\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}, \rho\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}, \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)$. L'équation de la tangente est donc

$$y = \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{5}\left(x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{10}\sqrt{2} - \frac{1}{5}x$$

(d) La tangente en B a pour équation $y = 1$, elle coupe la courbe en $M(\theta)$ tel que $\rho(\theta)\sin\theta = 1$. Cette condition s'écrit

$$1 - \sin\theta\left(1 + 1 - \sin^2\theta\right) = 0$$

soit en posant $X = \sin\theta$

$$X^3 - 2X + 1 = 0$$

On sait que 1 est racine de cette équation (car cette tangente passe par B et que $\sin\frac{\pi}{2} = 1$). On factorise par $X - 1$ pour obtenir

$$(X-1)\left(X^2 + X - 1\right) = 1$$

dont les solutions sont $1, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{5}, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$. Si on pose $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or), les solutions sont $1, -\phi$ et $\dfrac{1}{\phi}$ (le produit des racines vaut -1).

Puisque $-\phi < 1$, on ne retient que la solution $X = \dfrac{1}{\phi}$ qui donne $\gamma = \arcsin\dfrac{1}{\phi}$ et $\delta = \pi - \arcsin\dfrac{1}{\phi}$ (la solution $X = 1$ donnant le point B)

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Les coordonnées de C sont alors $(\rho(\gamma)\cos\gamma, \rho(\gamma)\sin\gamma)$.
Puisque

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \cos\left(\arcsin\frac{1}{\phi}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{\phi^2}} = \sqrt{\frac{\phi^2-1}{\phi^2}} = \sqrt{\frac{\phi^2-1}{\phi^2}} = \sqrt{\frac{\phi}{\phi^2}} = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \\ \text{car } \phi^2 &= \phi+1\end{aligned}$$

et

$$\rho(\gamma) = \phi$$
$$\text{car l'ordonnée de } C \text{ est } 1 \text{ donc } \rho(\gamma)\sin\gamma = 1$$

Les coordonnées de C sont

$$C : \left(\sqrt{\phi}, 1\right)$$

2 Les techniques

Exercice 8.11 *On commence par déterminer le domaine de définition de ρ. On a $\cos x \geq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+k\pi$. Avec $x = 2\theta$ et après division par 2, on a*

$$D_\rho = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$$

On réduit ensuite l'intervalle d'étude. On sait que ρ est 2π périodique ainsi $M(\theta+2\pi) = M(\theta)$. Si θ varie dans $I \cap D_\rho$ où I est de largeur 2π, on obtient toute la courbe On a également $\rho(\theta+\pi) = \rho(\theta)$, le point $M(\theta+\pi)$ est donc le symétrique de $M(\theta)$ par rapport au centre O du repère. On peut donc prendre I de largeur π, puis on fait une symétrie centrale de center O. Enfin $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, le point $M(-\theta)$ est symétrique de $M(\theta)$ par la symétrie orthogonale par rapport à Ox. On choisit donc $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on trace la courbe sur I, puis on fait une symétrie orthogonale d'axe Ox et une symétrie centrale.
Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, la fonction $\cos 2\theta$ est décroissante, la racine carrée est croissante, ainsi ρ est décroissante.
On peut également calculer $\rho'(\theta) = \dfrac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$. On en déduit que $\rho'(0) = 0$ si $\theta = 0$, la tangente est donc verticale en $\theta = 0$ (elle fait un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec $OM(0)$ qui est Ox). En $\theta = \frac{\pi}{4}$, on a $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, la tangente fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec Ox, il s'agit de la première bissectrice.
On peut aussi calculer $\tan V = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = -\operatorname{cotan} 2\theta = \tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, ainsi $V = 2\theta - \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ (ainsi V tend vers 0 si θ tend vers $\frac{\pi}{4}$, on retrouve le fait que la tangente est la première bissectrice).
Remarque :

Si α est l'angle entre la tangente en $M(\theta)$ et l'axe Ox, on a $\alpha = \theta + V$. On a une tangente horizontale si $\alpha = 0\ (\pi)$, ce qui donne $\theta = \frac{\pi}{6}$. Dans ce cas $\rho\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (ce qui permet de placer facilement le point $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$).

On peut montrer que la lemniscate est le lieu des points M tels que $MB \times MB'$ est constant, où $B = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $B' =$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ *et la constante vaut* $\frac{1}{4}$. *On peut le conjecturer (et le vérifier facilement) avec Maple. ou à la main.*

```
> rho:=sqrt(cos(2*t));
```

$$\rho := \sqrt{\cos(2\,t)}$$

```
> ( (rho*cos(t)-a)^2 + (rho*sin(t))^2) *
  ( (rho*cos(t)+a)^2 + (rho*sin(t))^2) ;
```

$$((\sqrt{\cos(2\,t)}\,\cos(t)-a)^2+\cos(2\,t)\,\sin(t)^2)\,((\sqrt{\cos(2\,t)}\,\cos(t)+a)^2+\cos(2\,t)\,\sin(t)^2)$$

```
> combine(%);
```

$$\frac{1}{2}\cos(4\,t)+\frac{1}{2}-a^2\cos(4\,t)-a^2+a^4$$

```
> subs(a=1/sqrt(2),%);
```

$$\frac{1}{4}$$

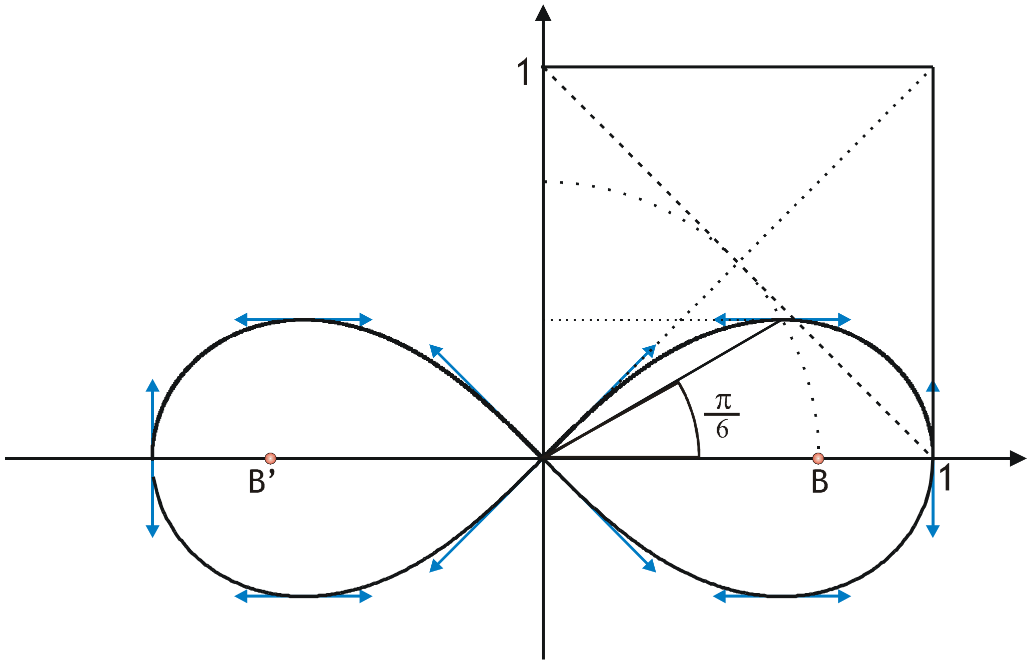
A la main, voici comment faire : $MB^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\rho\cos\theta\right)^2+\rho^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta+\rho^2$, *de même* $MB'^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\rho\cos\theta\right)^2+\rho^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta+\rho^2$. *D'où*

$$\begin{aligned}(MB\times MB')^2 &= \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta+\rho^2\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta+\rho^2\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}+\rho^2\right)^2-2\rho^2\cos^2\theta\\ &= \frac{1}{4}+\rho^4+\rho^2\left(1-2\cos^2\theta\right)\end{aligned}$$

Or $\rho^2(\theta)=\cos 2\theta = 2\cos^2\theta-1$ *donc*

$$(MB\times MB')^2=\frac{1}{4}$$

Pour finir, voici un tracé précis de la leminscate.



Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Exercice 8.12

1. *Si* M *a pour angle polaire* θ, M' *a pour angle polaire* $\theta+\pi$, *on a donc* $\overrightarrow{OM}=\rho(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$ *et* $\overrightarrow{OM'}=\rho(\theta+\pi)\overrightarrow{u_{\theta+\pi}}=-\rho(\theta+\pi)\overrightarrow{u_\theta}$ *d'où*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \rho(\theta)\overrightarrow{u_\theta}=(1+\cos\theta)\overrightarrow{u_\theta}\\ \overrightarrow{OM'} &= -(1-\cos\theta)\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

2. *On a donc*

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}=-(1-\cos\theta+1+\cos\theta)\overrightarrow{u_\theta}=-2\overrightarrow{u_\theta}$$

Ainsi

$$MM'=2$$

3. *On a de même*

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}}{2} &= \overrightarrow{OI}=(\rho(\theta)-\rho(\theta+\pi))\overrightarrow{u_\theta}\\ &= (1+\cos\theta-1+\cos\theta)\overrightarrow{u_\theta}\\ &= \cos\theta\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

Le point I *décrit donc la courbe d'équation polaire*

$$r(\theta)=\cos\theta$$

c'est donc le cercle de diamètre $[O,A]$ *où* $A:(1,0)$.

4. *On sait que* $\tan V=\dfrac{\rho}{\rho'}$ *donc* $V(\theta)=\dfrac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}$, *ainsi*

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathcal{T}_M,\mathcal{T}_{M'}}) &= (\mathcal{T}_M,Ox)+(Ox,\mathcal{T}_{M'})=-\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3(\theta+\pi)}{2}+\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{3}{2}\pi\\ &= \frac{\pi}{2}\ (\pi)\end{aligned}$$

ce qui prouve l'orthogonalité.
On peut prouver que le point d'intersection de $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}'$ *décrit le cercle de centre* A *et passant par* $B:(2,0)$.

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009