Corrigé : CNAM – Final MVA 006 – Juillet 2013

Exercice 1 :

1) ■ f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

* $f'_x(x,y) = y e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} - x^2 y e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

$= y(1-x^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

* $f'_y(x,y) = x(1-y^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

■ $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x^2) = 0 \\ x(1-y^2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

or $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

Conclusion : f admet 5 points critiques qui sont : $O(0,0)$; $A(1,1)$; $B(1,-1)$; $C(1,-1)$; $D(-1,1)$

2) ■ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

* $f''_{xx}(x,y) = -2xy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} - xy(1-x^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

$= xy(-3+x^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

* $f''_{yy}(x,y) = xy(-3+y^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

* $f''_{xy}(x,y) = (1-y^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} - x^2(1-y^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

$= (1-x^2)(1-y^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

Posons $\mathcal{D}(x,y) = \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2 - \left[f''_{xx}(x,y)\right]\left[f''_{yy}(x,y)\right]$

* en $O(0,0)$:

$\mathcal{D}(0,0) = [1]^2 - [0].[0] = 1 > 0$

$\Rightarrow f$ n'admet pas d'extremum en $O(0,0)$. C'est un point de selle.

* en $A(1,1)$:

$\begin{cases} \mathcal{D}(1,1) = [0]^2 - [-2e^{-1}][-2e^{-1}] < 0 \\ f''_{xx}(1,1) = -2e^{-1} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ admet un maximum local en $A(1,1)$; de valeur $f(1,1) = e^{-1}$

* en $B(-1,-1)$:

$\begin{cases} \mathcal{D}(-1,-1) = [0]^2 - [-2e^{-1}][-2e^{-1}] < 0 \\ f''_{xx}(-1,-1) = -2e^{-1} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ admet un maximum local en $B(-1,-1)$; de valeur $f(-1,-1) = e^{-1}$

* en $C(1,-1)$:

$\begin{cases} \mathcal{D}(1,-1) = [0]^2 - [2e^{-1}][2e^{-1}] < 0 \\ f''_{xx}(1,-1) = 2e^{-1} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ admet un minimum local en $C(1,-1)$; de valeur $f(1,-1) = -e^{-1}$

* en $D(-1,1)$:

$\begin{cases} \mathcal{D}(-1,1) = [0]^2 - [2e^{-1}][2e^{-1}] < 0 \\ f''_{xx}(-1,1) = 2e^{-1} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ admet un minimum local

en $D(-1,1)$; de valeur $f(-1,1)=-e^{-1}$

En conclusion : f admet :

→ un point de selle en $O(0,0)$

→ un maximum local de valeur e^{-1} atteint en $A(1,1)$ et $B(-1,-1)$

→ un minimum local de valeur $-e^{-1}$ atteint en $C(1,-1)$ et $D(-1,1)$

Remarque :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} f(-x,y)=f(x,-y)=-f(x,y) \\ f(-x,-y)=f(x,y) \end{cases}$$

⇒ la surface représentative de f est symétrique par rapport aux trois axes de coordonnées

Donc la nature des points B, C, D peut se déduire de celle de A.

3) $$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = \lim_{r\to+\infty} r^2\cos\theta\sin\theta\, e^{-\frac{r^2}{2}}$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \underbrace{\left(r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}\right)}_{\to 0}\underbrace{(\cos\theta\sin\theta)}_{\text{borné}}$$

$$= 0$$

4) . f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$

. $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$

. $f(1,1)=f(-1,-1)=e^{-1}$ est le seul maximum local de f

⇒ e^{-1} est un maximum global de f, atteint en $A(1,1)$ et $B(-1,-1)$

. Par symétrie on déduit que $f(-1,1)=f(1,-1)=-e^{-1}$ est un minimum global de f, atteint en $C(1,-1)$ et $D(-1,1)$

Exercice 2 :

1) $\vec{F}(t)=(x(t)\,;\,y(t))=\left(t+\frac{1}{t}\,;\,\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}\right)$

■ domaine de déf : $D_{\vec{F}}=\mathbb{R}^*$

■ Etude aux bornes de $D_{\vec{F}}$

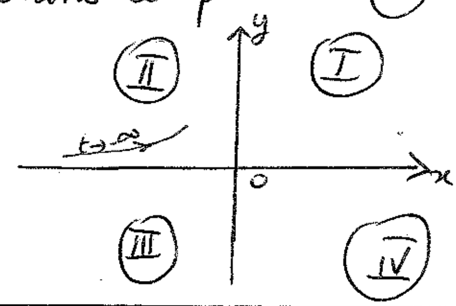
* $\boxed{\text{en } -\infty}$

. $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)=\lim\limits_{t\to-\infty} t+\frac{1}{t}=-\infty$

. $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}$
$=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1-2t}{t^2}$
$=\lim\limits_{t\to-\infty}-\frac{2}{t}=0^+$

∴ La courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$, la droite d'équation $y=0$ comme asymptote horizontale

Cette branche est située dans le quadrant (II)



* $\boxed{\text{en } 0^-}$

- $\lim\limits_{t \to 0^-} x(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} t + \frac{1}{t} = -\infty$
- $\lim\limits_{t \to 0^-} y(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{1-2t}{t^2} = +\infty$$

- $\lim\limits_{t \to 0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to 0^-} \frac{\frac{1-2t}{t^2}}{\frac{t^2+1}{t}}$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{1-2t}{t(t^2+1)} = -\infty$$

$\therefore$ (C) admet une branche parabolique de direction $(y'y)$ au voisinage de 0^-.
Cette branche est située dans le quadrant (II)

* $\boxed{\text{en } 0^+}$

- $\lim\limits_{0^+} x(t) = +\infty$
- $\lim\limits_{0^+} y(t) = +\infty$
- $\lim\limits_{0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$

$\therefore$ (C) admet une branche parabolique de direction $(y'y)$ au voisinage de 0^+.
Cette branche est située dans le quadrant (I).

* $\boxed{\text{en } +\infty}$

- $\lim\limits_{+\infty} x(t) = +\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} y(t) = 0^-$

$\therefore$ (C) admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale au voisinage de 0^+.
Cette branche est située dans le quadrant (IV)

2) $\forall\, t \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2} \\ y'(t) = -\frac{2}{t^3} + \frac{2}{t^2} = \frac{2(t-1)}{t^3} \end{cases}$$

d'où le tableau de variations :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	0^+	↗	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	0^-

3) Points singuliers ?

- $\vec{F}'(t) = \left(1 - \frac{1}{t^2} ; -\frac{2}{t^3} + \frac{2}{t^2}\right)$
- $\vec{F}''(t) = \left(\frac{2}{t^3} ; \frac{6}{t^4} - \frac{4}{t^3}\right)$
- $\vec{F}'''(t) = \left(-\frac{6}{t^4} ; -\frac{24}{t^5} + \frac{12}{t^4}\right)$

$\det(\vec{F}'(t) ; \vec{F}''(t)) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t^3} \\ -\frac{2}{t^3} + \frac{2}{t^2} & \frac{6}{t^4} - \frac{4}{t^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\left(\frac{6}{t^4} - \frac{4}{t^3}\right) - \frac{2}{t^3}\left(-\frac{2}{t^3} + \frac{2}{t^2}\right) = 0$$

$$\iff (t^2-1)(6-4t) - 2(-2+2t) = 0$$

$$\iff (t-1)(t+1)(3-2t) - 2(t-1) = 0$$

$\det(\vec{F}'(t) ; \vec{F}''(t)) = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)[(t+1)(3-2t) - 2] = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(-2t^2+t+1) = 0$

$\Leftrightarrow -2(t-1)(t-1)(t+\frac{1}{2}) = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+\frac{1}{2}) = 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}^* - \{1 ; -\frac{1}{2}\}$ le point $M(t)$ est un point bi-régulier (point ordinaire, à allure normale)

■ Etude du point $M(t=1)$:

- $\vec{F}(1) = (2,-1) \Rightarrow M(t=1)$ a pour coordonnées $(2,-1)$
- $\vec{F}'(1) = (0,0) = \vec{0}$
- $\vec{F}''(1) = (2;2) \neq \vec{0}$
- $\vec{F}'''(1) = (-6 ; -12)$ non colinéaire à $\vec{F}''(1)$

$$\begin{cases} p=2 : \text{pair} \\ q=3 : \text{impair} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le point $M(t=1)$, de coordonnées $(2,-1)$, est un point de rebroussement de $1^{ère}$ espèce

* Tangente ?

. vecteur directeur : $\vec{F}''(1) = (2,2)$

. $\begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ y+1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)-2(y+1)=0$

$\Leftrightarrow y = x-3$

$\rightarrow$ C'est l'équation de la tangente en ce point.

■ Etude du point $M(t=-\frac{1}{2})$:

- $\vec{F}(-\frac{1}{2}) = (-\frac{5}{2} ; 8) \Rightarrow M(t=-1/2)$ a pour coordonnées $(-\frac{5}{2} ; 8)$
- $\vec{F}'(-\frac{1}{2}) = (-3 ; 24) \neq \vec{0}$
- $\vec{F}''(-\frac{1}{2}) = (-16 ; 128)$: colinéaire à $\vec{F}'(-\frac{1}{2})$
- $\vec{F}'''(-\frac{1}{2}) = (-96 ; 960)$: non colinéaire à $\vec{F}'(-\frac{1}{2})$

$$\begin{cases} p=1 : \text{impair} \\ q=3 : \text{impair} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le point $M(t=-\frac{1}{2})$ de coordonnées $(-\frac{5}{2} ; 8)$ est un point d'inflexion

* tangente ?

. vecteur directeur : $\vec{F}'(-\frac{1}{2}) = (-3 ; 24)$

. $\begin{vmatrix} x+\frac{5}{2} & -3 \\ y-8 & 24 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 24(x+\frac{5}{2}) + 3(y-8) = 0$

$\Leftrightarrow y = -8x - 12$

$\hookrightarrow$ c'est l'équation de la tangente en ce point

4) ■ intersection avec les axes :

* avec l'axe $(x'x)$: $y(t) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2t = 0$

$\Leftrightarrow t = 1/2$

Pour $t = 1/2$ $\quad x = 5/2$

$\Rightarrow$ la courbe (C) coupe l'axe $(x'x)$ au point de coordonnés $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

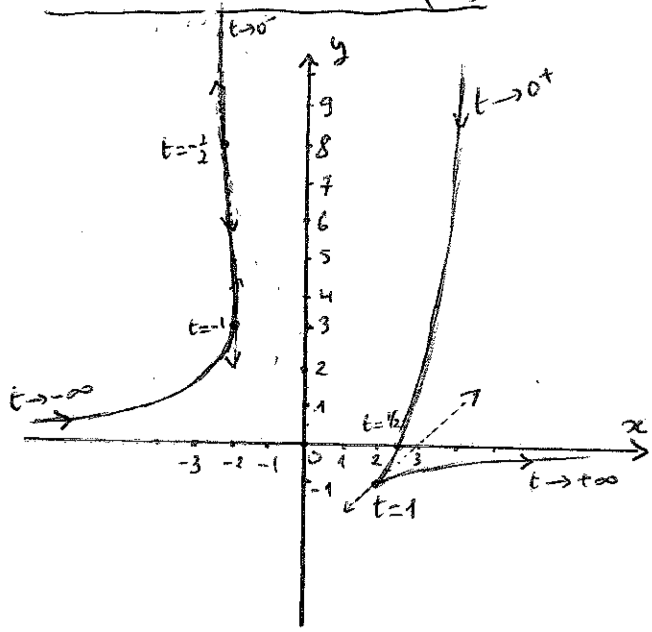
$*$ avec l'axe $(y'y)$: $x(t) = 0$

$\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 1 = 0$ impossible.

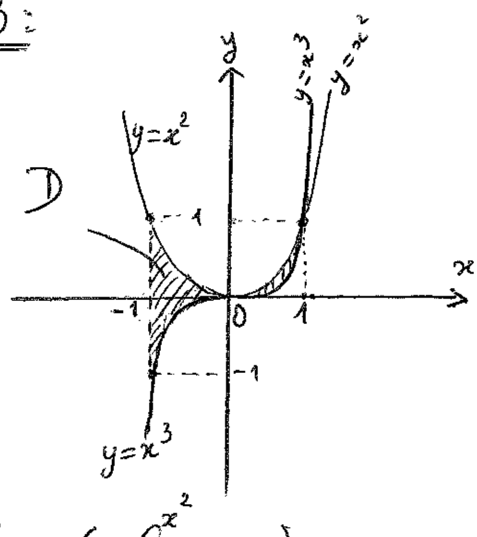
$\Rightarrow$ (C) ne coupe pas l'axe $(y'y)$

■ Tracé de la courbe (C) :



Exercice 3 :

a)

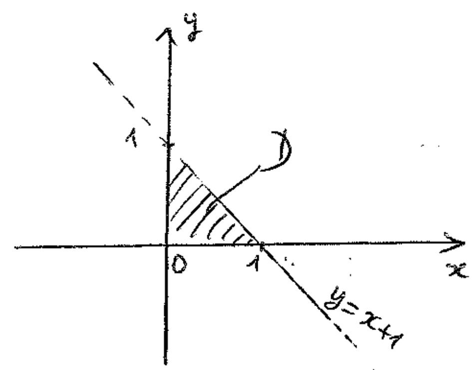


$$I = \int_{-1}^{1} x \left(\int_{x^3}^{x^2} y \, dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{x^2} \right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \underbrace{x(x^4 - x^6)}_{\text{impaire}} dx = 0$$

b)



Posons $\begin{cases} x = uv \\ y = (1-v)u \end{cases}$

$*(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} uv > 0 & (1) \\ (1-v)u > 0 & (2) \\ u < 1 & (3) \end{cases}$

D'après (1) : $(u > 0$ et $v > 0)$ ou $(u < 0$ et $v < 0)$

Mais (2) montre que $(u < 0$ et $v < 0)$ est impossible.

Donc $(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \ v > 0 \\ v < 1 \\ u < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u < 1 \\ 0 < v < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (u, v) \in \Delta$

$*$ Jacobien.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v)$$

$$= -u$$

$$* \; J = \iint_{\Delta} u e^{-u} |-u| \, du \, dv$$

$$= \left(\int_0^1 u^2 e^{-u} \, du\right)\left(\underbrace{\int_0^1 dv}_{=1}\right)$$

$$= \int_0^1 u^2 e^{-u} \, du$$

u^2	$+$	e^{-u}
$2u$	$-$	$-e^{-u}$
2	$+$	e^{-u}
0		$-e^{-u}$

$$J = \left[-u^2 e^{-u} - 2u e^{-u} - 2e^{-u}\right]_0^1$$

$$= -e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1} + 2$$

$$= 2 - 5e^{-1}$$

Remarque :
on peut calculer J par une autre méthode (coupe à x constant)

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y) e^{-x-y} \, dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x} \left(\int_0^{1-x} (x+y) e^{-y} \, dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x} \left[-(x+y)e^{-y} - e^{-y}\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x} \left[-e^{x-1} + x - e^{x-1} + 1\right] dx$$

$$J = \int_0^1 \left[-2e^{-1} + xe^{-x} + e^{-x}\right] dx$$

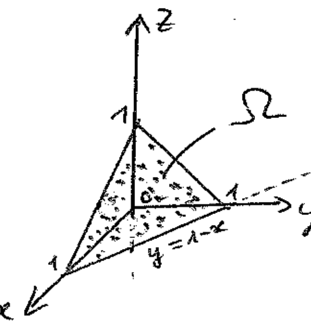
$$= \int_0^1 -2e^{-1} \, dx + \int_0^1 (x+1) e^{-x} \, dx$$

$$= -2e^{-1} + \left[-(x+1)e^{-x} - e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -2e^{-1} - \left(2e^{-1} + e^{-1} - 2\right)$$

$$= -5e^{-1} + 2$$

c)



$$K = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right) dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right] dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{4} y + \frac{1}{1+x+y}\right]_0^{1-x}\right) dx$$

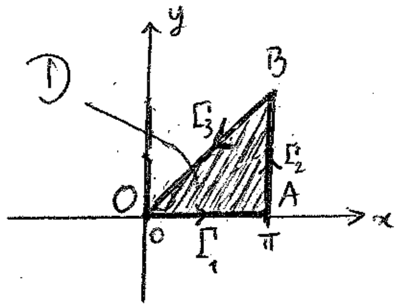
$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{4}(1-x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} x - \frac{1}{8} x^2 - \ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$$

Exercice 4 :



■ $I_1 = ?$

Sur Γ_1 : $\begin{cases} y = 0 \longrightarrow dy = 0 \\ x \text{ varie de } 0 \text{ à } \pi \end{cases}$

$$I_1 = \int_0^{\pi} 0\, dx = 0$$

■ $I_2 = ?$

Sur Γ_2 : $\begin{cases} x = \pi \longrightarrow dx = 0 \\ y \text{ varie de } 0 \text{ à } \pi \end{cases}$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \pi \cos y\, dy$$

$$= \pi \left[\sin y\right]_0^{\pi} = 0$$

■ $I_3 = ?$

Sur Γ_3 : $\begin{cases} y = x \longrightarrow dy = dx \\ x \text{ varie de } \pi \text{ à } 0 \end{cases}$

$$I_3 = \int_{\pi}^{0} (x\sin x + x\cos x)\, dx$$

$$= -\int_0^{\pi} x(\cos x + \sin x)\, dx$$

$u = x \qquad v' = \cos x + \sin x$

$u' = 1 \qquad v = \sin x - \cos x$

$$I_3 = -\left(\left[x(\sin x - \cos x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(\sin x - \cos x)\,dx\right)$$

$$= -\left[x(\sin x - \cos x)\right]_0^{\pi} + \left[-\cos x - \sin x\right]_0^{\pi}$$

$$I_3 = -\pi + 2$$

2) $I = I_1 + I_2 + I_3$

$$= 0 + 0 + (-\pi + 2)$$

$$= 2 - \pi$$

3) $I = \oint_{\Gamma} \underbrace{y\sin x}_{P}\, dx + \underbrace{x\cos y}_{Q}\, dy$

- Γ : chemin fermé simple
- P, Q : de classe C^1 sur Γ et à l'intérieur de Γ

Donc d'après le théorème de Green on peut écrire : $I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

D : domaine intérieur à Γ

Ainsi :

$$I = \iint_D (\cos y - \sin x)\, dx\,dy$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{x}(\cos y - \sin x)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\left[\sin y - y\sin x\right]_0^{x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi}(\sin x - x\sin x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}(1 - x)\sin x\, dx$$

$u = 1 - x \qquad v' = \sin x$

$u' = -1 \qquad v = -\cos x$

$$I = -\left[(1-x)\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

$$= +(1-\pi) + 1 - \cancel{\left[\sin x\right]_0^{\pi}} \xrightarrow{} 0$$

$$= 2 - \pi$$

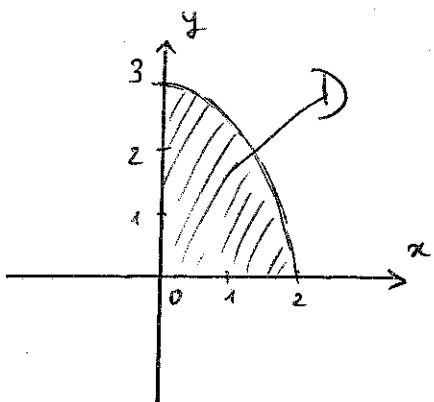
4) S'il existait une telle fonction f cela voudrait dire que I doit être 0.

Or $I = 2 - \pi \neq 0$

donc f n'existe pas.

Exercice 5 :

1)



. L'aire de D est $\mathcal{A}_D = \iint_D dx\,dy$

. Posons $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$

. sur D : $\begin{cases} \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } \pi/2 \\ r \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 \end{cases}$

. $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = 6r$

$$\mathcal{A}_D = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 6r\,dr \right) d\theta$$

$$= \left[\theta\right]_0^{\pi/2} . \left[3r^2\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2} \text{ u.a.}$$

2) La masse de D est

$$M_D = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D 12\cos(9x^2+4y^2)\,dx\,dy$$

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$$

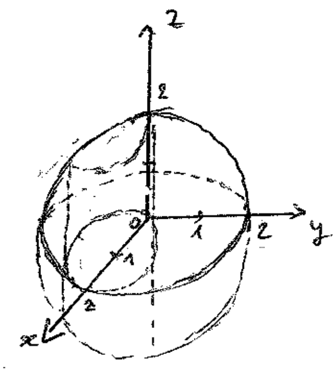
$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 12\cos(36r^2) . 6r \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 72r\cos 36r^2\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2} . \left[\sin 36r^2\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} . \sin 36 \quad \text{unités de masse}$$

Exercice 6 :



$x^2+y^2 = 2x$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

$\hookrightarrow$ cylindre dont la base est le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1

Le volume de Ω est :

$$V = 2 \iiint_{\Omega_1} dx\,dy\,dz$$

où Ω_1 = partie de Ω située au dessus du plan (Oxy)

Passons aux coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad x^2+y^2=2x \longrightarrow r = 2\cos\theta$$

Sur Ω_1 : $\begin{cases} \cdot\ \theta \text{ varie de } -\pi/2 \text{ à } \pi/2 \\ \cdot \text{ Pour } \theta \text{ fixé, } r \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\cos\theta \\ \cdot \text{ Pour } \theta, r \text{ fixé, } z \text{ varie de } 0 \text{ à } \sqrt{4-r^2} \end{cases}$

$$V = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\,dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} dz$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\sqrt{4-r^2}\,dr$$

$$= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{2}{3}(4-r^2)\sqrt{4-r^2}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(4\sin^2\theta\sqrt{4\sin^2\theta} - 8\right)d\theta$$

$$= -\frac{16}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin^2\theta\,|\sin\theta| - 1\right)d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\sin^3\theta - 1\right)d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\int_0^{\pi/2} \left((1-\cos^2\theta)\sin\theta - 1\right)d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta - 1\right)d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} - \theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{32}{3}\left(\left[-\frac{\pi}{2}\right] - \left[-\frac{2}{3}\right]\right)$$

$$= \frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \quad \text{unités de volume}$$

Exercice 7:

1) $A = aI + bJ$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = -3 \\ b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc $\underline{A = -4I + J}$

2) ▪ $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$

▪ $A^2 = (-4I+J)^2$

$$= 16I + J^2 - 8J$$

$$= 16I + 3J - 8J$$

$$= -5J + 16I$$

3) $A^2 + 5A = -5J + 16I + 5(-4I+J)$

$$= -5J + 16I - 20I + 5J$$

$$= -4I$$

4) $A^2 + 5A = -4I \Leftrightarrow A(A+5I) = -4I$

$$\Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{4}(A+5I)\right) = I$$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A+5I)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5) le système (S) à résoudre s'écrit matriciellement

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}_{B}$$

$$\Leftrightarrow \quad X = A^{-1}.B$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/4\\-1\\-3/4\end{pmatrix}$$

Donc (S) admet une solution unique dans $\mathbb{R}^3$ donnée par le triplet $\left(-\frac{5}{4}, -1, -\frac{3}{4}\right)$

6) a) $AX=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}$ (1)

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{X}_{(3,2)}=\underbrace{A^{-1}}_{(3,3)}.\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}}_{(3,2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&3\\4&4\\3&5\end{pmatrix}$$: c'est l'unique solution de (1)

b) $\underbrace{X}_{(?,3)}\underbrace{A}_{(3,3)}=\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}}_{(3,2)}$: impossible

donc cette équation matricielle n'admet pas de solution.

c) $\underbrace{J}_{(3,3)}\underbrace{X}_{(3,2)}=\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\2&1\\2&1\end{pmatrix}}_{(3,2)}$ (3)

Posons $X=\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+b+c&d+e+f\\a+b+c&d+e+f\\a+b+c&d+e+f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c=2\\d+e+f=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=2-a-b\\f=1-d-e\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad X=\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\2-a-b&1-d-e\end{pmatrix}$$

Donc les solutions de l'équation (3) sont toutes les matrices de la forme X ci dessus où a, b, d, e décrivent $\mathbb{R}$