

1. Le tableau suivant représente le salaire en 100 \$ de 450 fonctionnaires d'un même travail dans plusieurs sociétés:

$x_i$	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11	11 - 13	
$n_i$	240	100	60	40	10	$n = 450$

- Tracer le polygone cumulé croissant
  - Estimer le nombre des fonctionnaires dont le salaire est entre 400\$ et 800\$
  - Calculer la moyenne, l'écart type, le mode et la médiane de cette série
  - Expliquer d'après b) ce que vous en pensez au sujet de cette série?
- 

2. Soient  $a, b$  deux réels strictement positifs. On pose  $u_0 = a, v_0 = b$  et pour tout  $n$ ,

$$\begin{cases} \frac{2}{u_{n+1}} &= \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \\ v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

---

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx$$

- (a) Intégrer par parties  $I_{n,p}$  pour établir la relation

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

sachant que  $[x^\alpha (\ln x)^\beta]_{(0)} = 0$  pour tous  $\alpha, \beta > 0$ .

- (b) Sachant que  $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$ , montrer que

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

- (c) Déduire,  $\int_0^1 x^3 (\ln x)^2 dx$
- 

4. Calculer:

(a)  $I = \int \frac{x+2}{x^2+3x-4} dx$

(b)  $J = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

---

5. L'équation de mouvement d'un oscillateur harmonique avec résistance de l'air est:

$$x''(t) + \omega^2 x(t) + r x'(t) |x'(t)| = 0 \quad (1)$$

avec  $\omega^2$  et  $r$  sont deux paramètres positifs. Soit  $v(x(t)) = x'(t)$  la vitesse au point  $x(t)$ .

- (a) Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation de Bernoulli

$$v'(x) + \sigma r v(x) = -\omega^2 x v^{-1} \quad (2)$$

où  $\sigma = \frac{|v|}{v} = \pm 1$  ( $\sigma$  désigne le signe de  $v$ )

- (b) Utiliser un changement de variable convenable pour montrer que l'équation (2) est équivalente à une équation linéaire que l'on doit préciser. Résoudre cette dernière équation linéaire en déduire la solution de l'équation (2) sachant que  $v(0) = 0$ .

---

6. Soit  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  avec  $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{\cos t}$ .

- (a) Donner le D.L de  $F(x)$  au voisinage de 0 à l'ordre 4

(b) Donner une estimation de  $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+t)}{\cos t} dt$

- (c) Justifier que  $F(x)$  est dérivable et donner sa dérivée
-