Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam Liban

Calcul différentiel et intégral (MVA005)

Examen Final 2017-2018 **Durée : 2h :00**

Centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

Documents et Téléphones : STRICTEMENT INTERDITS
Sujets Coordonnés par : Dr. Noureddine ASSAAD

Solutions

Exercice 1 (25points) On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = \left(x^2 + x + 1\right) e^{-x} \qquad (E)$$

1. Déterminer $y_g(x)$ la solution générale de l'équation sans second membre associée à (E). $(5pts)$
2. Déterminer $y_p(x)$ une solution particulière de (E). $(10pts)$
3. Déduire $y(x)$ la solution générale de (E). $(2pts)$
4. Déterminer $y_1(x)$ la solution de (E) telle que $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$. $(8pts)$

Solution. 1

1. ESSM : $y'' - 2y' + y = 0$
   Son équation caractéristique est : $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0$
   Donc on a une racine double $\lambda = 1$ $\boxed{\text{3 points}}$
   La solution générale de l'équation sans second membre associée à (E) est
   $$y_g(x) = (Ax + B)\, e^x \quad \boxed{\text{2 points}}$$

2. $m = -1$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique donc la solution particulière à chercher est de la forme : $y_p = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x}$. $\boxed{\text{2 points}}$
   $y_p' = \left(-ax^2 - bx - c + 2ax + b\right) e^{-x} = \left(-ax^2 + (2a - b)\, x + b - c\right) e^{-x}$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $y_p'' = \left(ax^2 - (2a - b)\, x - b + c - 2ax + 2a - b\right) e^{-x} = e^{-x} \left(ax^2 + (-4a + b)\, x + 2a - 2b + c\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$
   On a $y'' - 2y' + y = x^2 + x - 1$ donc :
   $\left(ax^2 + (-4a + b)\, x + 2a - 2b + c\right) - 2\left(-ax^2 + (2a - b)\, x + b - c\right) + \left(ax^2 + bx + c\right) = x^2 + x + 1$
   $4ax^2 + (-8a + 4b)\, x + 2a - 4b + 4c = x^2 + x + 1$ $\boxed{\text{1 point}}$
   Par identifcation on aura : $\begin{cases} 4a = 1 \\ -8a + 4b = 1 \\ 2a - 4b + 4c = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1 + 8a}{4} = \dfrac{3}{4} \\ c = \dfrac{1 - 2a + 4b}{4} = \dfrac{7}{8} \end{cases}$ $\boxed{\text{3 points}}$

d'où :

$$y_p(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{7}{8}\right) e^{-x} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

3. La solution générale de (E) est $y = y_g + y_p$ soit

$$y(x) = (Ax + B) e^x + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{7}{8}\right) e^{-x} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

4. $y(0) = B + \frac{7}{8} = 1 \Longrightarrow B = -\frac{7}{8}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $y'(x) = (Ax + B + A) e^x + \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} - \frac{7}{8} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) e^{-x}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $y'(0) = B + A - \frac{7}{8} + \frac{3}{4} = 0 \Longrightarrow A = \frac{7}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Soit :

$$y(x) = \left(x - \frac{7}{8}\right) e^x + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{7}{8}\right) e^{-x} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

Exercice 2 (20 points) : On considère l'équation différentielle :

$$|x|\, y' + y = x^n \tag{E}$$

où $n \in \mathbb{R}$.

Intégrer l'équation (E) en distinguant les cas où $x > 0$ et $x < 0$

Solution. 2

1. Si $x > 0$: $|x| = x$,l'équation s'écrit : $xy' + y = x^n$ $\boxed{\text{2 points}}$

   ESSM : $x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln y = -\ln x + C = \ln\frac{K}{x}$ on trouve $y_g = \frac{K}{x}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   EASM : $K = K(x)$: $y_p = \frac{K(x)}{x}$, $y_p' = \frac{K'x - K}{x^2}$

   $xy_p' + y_p = x^n \Longrightarrow \frac{K'x - K}{x} + \frac{K}{x} = x^n$

   $K' = x^n \Longrightarrow K = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et donc $y_p = \frac{x^n}{n+1}$ $\boxed{\text{4 points}}$

$$y = y_g + y_p = \frac{K}{x} + \frac{x^n}{n+1} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

2. Si $x < 0$: $|x| = -x$,l'équation s'écrit : $-xy' + y = x^n$ $\boxed{\text{2 points}}$

   ESSM : $-x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln y = \ln|x| + C_1$ alors $y_g = kx$ $\boxed{\text{3 points}}$

   EASM : $y_p = kx$ avec $k = k(x)$: $y_p' = k + k'x$

$-xy_p' + y_p = x^n \Longrightarrow -kx - k'x^2 + kx = x^n$

$k' = -x^{n-2}$ donc $k = -\dfrac{x^{n-1}}{n-1} \Longrightarrow y_p = -\dfrac{x^n}{n-1}$ $\boxed{\text{4 points}}$

$$y = kx - \frac{x^n}{n-1} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Exercice 3 (25 points) Soient les intégrales

$$I = \int \sqrt{2ax - x^2}dx \quad \text{et} \quad J = \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

1. Montrer que $2ax - x^2 = a^2 - (x-a)^2$ $(3pts)$
2. En faisant un chagement de variable, calculer les intégrales I et J. $(10 + 7 = 17pts)$
3. Déduire la valeur de l'intégrale : $K = \displaystyle\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x - \sin^2 x}}$ $(5pts)$

Solution. 3

1. $2ax - x^2 = 2ax - x^2 + a^2 - a^2 = a^2 - \left(x^2 - 2ax + a^2\right) = a^2 - (x-a)^2$ $\boxed{\text{3 points}}$
2. Posons $x - a = a\sin\theta$ donc $dx = a\cos\theta d\theta$ $\boxed{\text{1 point}}$

   et $\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2} = a\cos\theta$ $\boxed{\text{1 point}}$

   (a) $I = \displaystyle\int \sqrt{2ax - x^2}dx = \int a^2\cos^2\theta d\theta$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $= a^2 \displaystyle\int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \dfrac{a^2}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C = \dfrac{a^2}{2}\left(\theta + \sin\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta}\right) + C$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \dfrac{a^2}{2}\left(\arcsin\dfrac{x-a}{a} + \dfrac{x-a}{a}\sqrt{1 - \dfrac{(x-a)^2}{a^2}}\right) + C$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x-a}{a} + \dfrac{x-a}{2}\sqrt{a^2 - (x-a)^2} + C$ $\boxed{\text{1 point}}$

   (b) En faisant le même calcul que dans (a) on trouve :

   $J = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \int \frac{a\cos\theta d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C$ $\boxed{\text{4 points}}$

   $= \arcsin\dfrac{x-a}{a} + C.$ $\boxed{\text{3 points}}$

   (c) Soit $u = \sin x$ donc $du = \cos x dx$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $K = \displaystyle\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x - \sin^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt{2u - u^2}}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   K est semblable à J avec $a = 1$

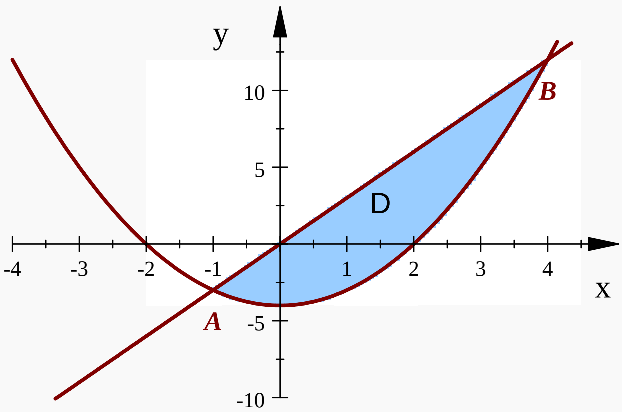
   $K = \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2u - u^2}} = \arcsin(u-1) + C = \arcsin(\sin x - 1) + C$ $\boxed{\text{2 points}}$

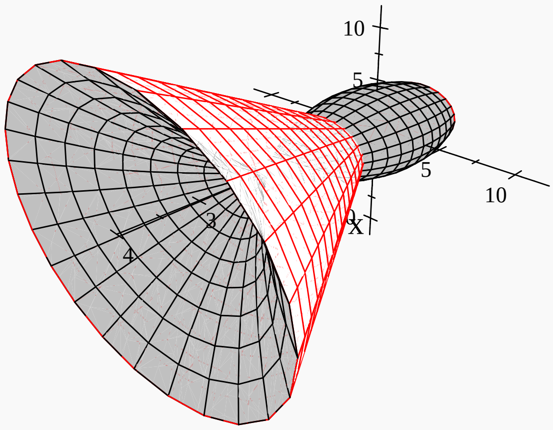
Exercice 4 (15 points) Soit la zone (D) du plan (xOy) limitée par la courbe $y = x^2 - 4$ et la droite $y = 3x$

1. Tracer (D) $(2pts)$
2. Calculer l'aire de la région (D) $(8pts)$
3. Calculer le volume du solide généré par rotation de (D) autour de l'axe Ox. $(5pts)$

Solution. 4

1. Figure $\boxed{\text{2 points}}$





2. L'aire de la zone (D) est $A = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\, dx\right|$

   Les points d'intersection sont A et B tels que $x^2 - 4 = 3x \iff x^2 - 3x - 4 = 0$

   $\Delta = 9 + 16 = 25 \Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_A = -1 \\ x_B = 4 \end{cases}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   Alors

   $A = \left|\int\limits_{-1}^{4} \left((3x) - \left(x^2 - 4\right)\right) dx\right| = \dfrac{125}{6}$ $\boxed{\text{5 points}}$

3. Le volume de solide de révolution autour de l'axe ox est

$$V = \pi \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx \right| = \pi \left| \int_{-2}^{1} \left((3x)^2 - \left(x^2-4\right)^2\right) dx \right|$$

$$= \pi \left| \int_{-2}^{1} \left(-x^4 + 17x^2 - 16\right) dx \right| = \frac{18}{5}\pi \ \boxed{\text{5 points}}$$

Exercice 5 (15 points) Traiter au choix UNE de deux questions suivantes :

1. On considère la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$$

   (a) Montrer que cette série est convergente.($3pts$)

   (b) Décomposer le terme générale $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$ fractions simples. ($5pts$)

   (c) Calculer la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$. Déduire la somme de cette série.($5+2=7pts$)

---

2. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{4x^2-1}$$

   (a) Décomposer $f(x)$ en fractions simples ($5pts$)

   (b) Calculer $\int f(x)\, dx$. ($5pts$)

   (c) Calculer $\lim\limits_{X\to\infty} \int_1^X f(x)\, dx$ ($5pts$)

Solution. 5

1. Le terme générale est $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$

   (a) Lorsque n est très grand $4n^2 - 1 \sim 4n^2$ donc $\dfrac{1}{4n^2-1} \sim \dfrac{1}{4n^2}$, les termes généraux sont positifs. La série est donc de même nature que la série de Riemann $\dfrac{1}{n^2}$ donc elle est convergente. $\boxed{\text{3 points}}$

   (b) $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{A}{2n+1} + \dfrac{B}{2n-1}$

   – multiplions les deux membres par $(n+1)$ on obtient :
   $\dfrac{1}{(2n-1)} = A + \dfrac{B(2n+1)}{2n-1}$. Pour $n = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow A = -\dfrac{1}{2}$

– multiplions les deux membres par $(2n-1)$ on obtient :
$\frac{1}{(2n+1)} = \frac{A(2n-1)}{(2n+1)} + B$. Pour $n = \frac{1}{2} \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$
Alors :

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

Ou bien : $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n-1}$

$$= \frac{(2n-1)A + (2n+1)B}{(4n^2-1)} = \frac{2(A+B)n - A + B}{4n^2-1}$$

$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B = 1 \end{cases} \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}, \ B = \frac{1}{2}$

(c) $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(4n^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2N-1}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N+1}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right)$ $\boxed{\text{5 points}}$

$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $f(x) = \frac{1}{4x^2-1}$

(a) $\frac{1}{4x^2-1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{2x-1}$
– multiplions les deux membres par $(x+1)$ on obtient :
$\frac{1}{(2x-1)} = A + \frac{B(2x+1)}{2x-1}$. Pour $x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$
– multiplions les deux membres par $(2x-1)$ on obtient :
$\frac{1}{(2x+1)} = \frac{A(2x-1)}{(2x+1)} + B$. Pour $x = \frac{1}{2} \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$ alors

$$f(x) = \frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{2(2x-1)} - \frac{1}{2(2x+1)} \boxed{\text{5 points}}$$

(b) $\int \frac{dx}{4x^2-1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(2x-1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(2x+1)}$

$= \frac{1}{4}\ln|2x-1| - \frac{1}{4}\ln|2x+1| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C$ $\boxed{\text{5 points}}$

(c) $\int_1^X \frac{dx}{4x^2-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2X-1}{2X+1}\right| + \frac{1}{4}\ln 3$

$\lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{dx}{4x^2-1} = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2X-1}{2X+1}\right| + \frac{1}{4}\ln 3 = \frac{1}{4}\ln 3$ $\boxed{\text{5 points}}$