Série 6 (Corrigé)

Exercice 1

a) Calculer la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.: *On effectue la réduction de la matrice A jusqu'à obtenir une forme échelonnée. On calcule au fur et à mesure la matrice triangulaire inférieure L (pour la première colonne de L, on a $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ et ainsi de suite pour les colonnes suivantes).*

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & 6 & 3 \\ \mathbf{6} & 3 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & -\mathbf{1} & -1 \\ 0 & -\mathbf{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{4}{3}} \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{\frac{2}{3}} & 1 & 0 \\ \mathbf{\frac{1}{9}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \mathbf{1} & 0 \\ \frac{1}{9} & \mathbf{\frac{2}{3}} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = L.$$

On a donc la décomposition $A = LU$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Résoudre le système linéaire $Ax = b$, où A est la matrice ci-dessus, en utilisant la décomposition LU, avec $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Sol.: $Ax = b \iff LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b & (i) \\ Ux = y. & (ii) \end{cases}$

Solution de (i): $y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solution de (ii): $x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{17}{6} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la décomposition LU de la matrice obtenue en permutant les lignes 1 et 2 de la matrice A s'écrit
$$PA = LU,$$
où P est une matrice élémentaire (matrice de permutation). Donner P, L et U.

Sol.: *La matrice de permutation qui permute les deux premières lignes est donnée par* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et on a* $PA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Suivant la même démarche qu'à l'exercice 1 on obtient*

$$\begin{aligned} PA &= \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 3 & 1 \\ \mathbf{2} & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & \mathbf{\frac{3}{2}} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix} = U \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \frac{1}{2} & \mathbf{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = L. \end{aligned}$$

On a donc la décomposition $PA = LU$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Résoudre $Ax = b$, où $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ à l'aide de la décomposition $PA = LU$.

Sol.: *Notons que* $Pb = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ *et observons que*

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff LUx = Pb \iff \left\{ \begin{array}{lcll} Ly & = & Pb & (i) \\ Ux & = & y. & (ii) \end{array} \right.$$

Solution de (i): $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solution de (ii): $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

a) Montrer que l'inverse de la matrice

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & & \vdots \\ & & & -l_{i+1,i} & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -l_{n,i} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

est donné par

$$L_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & & \vdots \\ & & & l_{i+1,i} & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n,i} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

Méthode 1. *On calcule la forme échelonnée réduite de la matrice* $[L_i \quad I]$*:*

$$[L_i \quad I] \to \ldots \textit{(à détailler)} \to [I \quad L_i^{-1}].$$

Méthode 2. *(sans calcul) La matrice L_i correspond à une collection d'opérations élémentaires sur les lignes. C'est la matrice qui soustrait la ligne i aux lignes $i+1,\ldots,n$ avec des coefficients multiplicateurs respectifs $l_{i+1,i},\ldots,l_{n,i}$. Par conséquent, l'inverse L_i^{-1} est donné par la matrice qui* ***ajoute*** *la ligne i aux lignes $i+1,\ldots,n$ avec les mêmes coefficients multiplicateurs.*

b) Montrer que le produit de deux matrices $L_i, L_j, i < j$ est donné par

$$L_iL_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \vdots & & -l_{i+1,i} & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & -l_{j+1,j} & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & -l_{n,i} & & -l_{n,j} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: *Si M est une matrice avec n lignes, le produit L_iM correspond à soustraire la ligne i aux lignes $i+1,\ldots,n$ de la matrice M avec les coefficients multiplicateurs respectifs $l_{i+1,i},\ldots,l_{n,i}$. On applique ce résultat pour $M = L_j$ en utilisant $j > i$.* $\square$

Exercice 4

Soient A et B sont des matrices $n \times n$. Montrer les assertions suivantes.

a) Si A et B sont des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures), alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Sol.: *On suppose A et B triangulaires inférieures. On procède par récurrence sur la dimension des matrices.*

(initialisation) *Pour $n = 1$, le résultat est évident car toutes les matrices de taille 1×1 sont en fait triangulaires.*

(récurrence) *On suppose le résultat vrai pour les matrices de taille $(n-1) \times (n-1)$ avec $n \geq 2$. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices triangulaires inférieures de taille $n \times n$. On note $A_{(n-1)\times(n-1)}$ et $B_{(n-1)\times(n-1)}$ les sous matrices obtenues en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. On calcule:*

$$AB = \begin{pmatrix} & & 0 \\ A_{(n-1)\times(n-1)} & & \vdots \\ & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 0 \\ B_{(n-1)\times(n-1)} & & \vdots \\ & & 0 \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & & & & 0 \\ & & A_{(n-1)\times(n-1)}B_{(n-1)\times(n-1)} & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ * & * & \cdots & \cdots & * & * & a_{nn} \times b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse de récurrence $A_{(n-1)\times(n-1)}B_{(n-1)\times(n-1)}$ est triangulaire inférieure, donc AB est triangulaire inférieure. $\square$

Dans le cas où A et B sont des matrices triangulaires supérieure, on peut faire le même raisonnement par récurrence.

On peut aussi déduire le résultat pour les matrices triangulaire supérieures à partir du résultat pour les matrices triangulaires inférieures. Soit A et B des matrices triangulaires supérieures. On a l'égalité $AB = ((AB)^T)^T = (B^T A^T)^T$. Le produit $B^T A^T$ est triangulaire inférieur comme produit de deux matrices triangulaires inférieures. Ainsi AB est triangulaire supérieure.

b) Si A et B sont deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) avec que des coefficients 1 sur la diagonale, alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) avec que des coefficients 1 sur la diagonale.

Sol.: *On utilise la même méthode que pour la question a).*

L'assertion est évidente pour $n = 1$. On suppose l'assertion vraie pour les matrices de taille $(n-1) \times (n-1)$. Alors pour les matrices de taille $n \times n$, on a $a_{nn} = 1, b_{nn} = 1$, $a_{nn}b_{nn} = 1$. On conclut ensuite de la même manière. $\square$

c) Si A est une matrice inversible triangulaire inférieure (resp. supérieure), alors A^{-1} est aussi une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Sol.:

Méthode 1. *(sans calcul) On considère la forme échelonnée réduite* $[B \quad C]$ *de la matrice* $[A \quad I]$ *(de taille* $n \times (2n)$*).*

La matrice C *est obtenue dans l'algorithme de mise sous forme échelonnée en multipliant des matrices élémentaires diagonales* $E(k,i)$ *qui multiplient la ligne* i *par* $k \neq 0$ *et des matrices élémentaires* $E(k,i,j)$ *qui ajoutent* k *fois la ligne* i *sur la ligne* j*. Comme la matrice* A *est triangulaire inférieure, l'algorithme de Gauss ne fait intervenir que des matrices* $E(k,i,j)$ *avec* $j > i$*, c'est-à-dire triangulaires inférieures. D'après a),* C *est donc triangulaire inférieure.*

En outre, comme A *est inversible, on a* $B = I$*. De* $CA = B$*, on déduit que* $A^{-1} = C$ *est triangulaire inférieure.*

Méthode 2. *On peut refaire une démonstration par récurrence sur la dimension comme au a).*

Le résultat est évident en dimension $n = 1$*. On suppose l'assertion vraie pour les matrices de taille* $(n-1) \times (n-1)$*. Étant donnée une matrice* $n \times n$ *inversible* A*, on note*

$$A = \begin{pmatrix} & & 0 \\ A_{(n-1)\times(n-1)} & & \vdots \\ & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} & & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{A}_{(n-1)\times(n-1)} & & \vdots \\ & & \tilde{a}_{n-1,n} \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

On calcule le produit

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} & a_{11}\tilde{a}_{1n} \\ A_{(n-1)\times(n-1)}\tilde{A}_{(n-1)\times(n-1)} & a_{21}\tilde{a}_{1n} + a_{22}\tilde{a}_{2n} \\ & \vdots \\ * \quad * \quad * & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{a}_{in} \end{pmatrix}.$$

Comme $AA^{-1} = I$*, on obtient*

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_{(n-1)\times(n-1)} = A^{-1}_{(n-1)\times(n-1)} \\ &a_{11}\tilde{a}_{1n} = 0 \Rightarrow \tilde{a}_{1n} = 0 \\ &a_{21}\tilde{a}_{1n} + a_{22}\tilde{a}_{2n} = 0 \Rightarrow \tilde{a}_{2n} = 0 \\ &\quad \vdots \\ &a_{n-1,1}\tilde{a}_{1n} + a_{n-1,2}\tilde{a}_{2n} + \cdots + a_{n-1,n-1}\tilde{a}_{n-1,n} = 0 \Rightarrow \tilde{a}_{n-1,n} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{a}_{in} = 1 \Rightarrow \tilde{a}_{nn} = a_{nn}^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, A^{-1} *est triangulaire inférieure.* $\square$

Cas des matrices triangulaires supérieures. On peut conclure en utilisant le résultat pour les matrices triangulaires inférieures. Si A *est inversible, on a* $AA^{-1} = A^{-1}A = I$*. En transposant, on obtient* $(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I$*, ainsi* $A^{-1} = ((A^T)^{-1})^T$*. Si* A *est triangulaire supérieure, alors* A^T *est triangulaire inférieure, et donc aussi* $(A^T)^{-1}$*, et* $A^{-1} = ((A^T)^{-1})^T$ *est triangulaire supérieure.*

Exercice 5

Donner un algorithme pour calculer l'inverse d'une matrice A inversible de taille $n \times n$, en utilisant la décomposition LU. Combien d'opérations arithmétique l'algorithme nécessite t-il? (Ici on compte 1 multiplication + 1 addition comme une seule opération).

Sol.:

(a) *On note* $A^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, *avec* α_i *vecteur de taille* $n \times 1$. $I = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$, $e_i = (0, \cdots, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdots, 0)^T$.

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow A\alpha_i = e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

En utilisant la décomposition $A = LU$, *on* $L(U\alpha_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Soit $y_i = U\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$. *On obtient*

$$\begin{cases} Ly_i = e_i \\ U\alpha_i = y_i. \end{cases} \tag{1}$$

On résout les n *systèmes linéaires ci-dessus, et on obtient* $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = A^{-1}$.

(b) *L'algorithme de la décomposition LU, où l'on calcule successivement les lignes de U et colonnes de L, s'écrit:*

$$\begin{array}{lcll} \textit{pour } k & = & 1, \ldots, n, & \\ \quad u_{kj} & := & a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}, & j = k+1, \ldots, n \\ \quad l_{ik} & := & \left(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk}\right)/u_{kk}, & i = k+1, \ldots, n, \\ \textit{fin} & & & \end{array} \tag{2}$$

où $A = (a_{ij}), L = (l_{ij}), U = (l_{ij})$.

(c) *On calcule le nombre d'opérations nécessaires:*

i) *Opérations pour la décomposition LU, d'après* (2). *Pour chaque coefficient* u_{kj}, *on effectue* $k-1$ *additions & multiplications, soit* $k-1$ *opérations. Pour chaque coefficient* l_{ik}, *on effectue* $k-1$ *additions & multiplications, et une division, soit* k *opérations. Le nombre d'opérations pour la décomposition LU est donc (voir cours) environ* $\boxed{\frac{1}{3}n^3}$.

ii) *Le nombre d'opérations pour résoudre les* n *couples de systèmes linéaires triangulaires* (1) *est*

$$n[\sum_{i=1}^{n}(i-1) + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)] = \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = \boxed{n^3}.$$

iii) *Nombre total d'opérations:*

$$\sim \boxed{\frac{4}{3}n^3}$$

Remarque: *En fait, on peut calculer A^{-1} en seulement environ n^3 opérations en s'inspirant de la décomposition $A = LU$. L'idée est de ne pas calculer la matrice L, mais de calculer directement la matrice L^{-1}.*

Pour cela, on effectue directement une réduction de la matrice $[A \quad I]$, et on obtient avec $\sum_{k=2}^{n}(nk + k) \approx \frac{n^3}{2}$ opérations une matrice $[U \quad L^{-1}]$. Ainsi, on a calculé la matrice U et la matrice L^{-1}. Ensuite, puisque $UA^{-1} = L^{-1}$ les colonnes $\alpha_1, \dots \alpha_n$ de la matrice A^{-1} sont obtenues en résolvant les n systèmes triangulaires supérieures $U\alpha_j = b_j$ où b_j est $j$ième colonne de la matrice L^{-1} calculée précédemment (environ $n\frac{n^2}{2} = \frac{n^3}{2}$ opérations).

Exercice 6

Calculer le déterminant des matrices suivantes.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A: L'idée est de développer par rapport à une ligne ou une colonne avec beaucoup de zéros pour faire le moins de calculs possible.
On développe par rapport à la première colonne de A

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4.$$

B: On développe par rapport à la seconde colonne de B, $\det B = 0$. On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc $\det B = 0$.

C: On développe par rapport à la troisième colonne de C, $\det C = 0$. On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc $\det C = 0$.

D: On développe par rapport à la première colonne de D,
$$\det D = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

E: On développe par rapport à la première colonne de E,

$$\det E = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 84.$$

b) Même question pour A^T, B^T, C^T, D^T, E^T.

Sol.: *La transposition ne change pas la valeur du déterminant. Les résultats sont les même qu'au a).*

Exercice 7

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) en utilisant le développement avec les cofacteurs,

Sol.: *On développe par rapport à la troisième ligne de A (ligne avec des zéros):*

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = -12.$$

b) en utilisant la décomposition LU.

Sol.: $\det A = \det U$. *D'après l'exercice* 4, $\det A = -12$.

Exercice 8

Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indication: Utiliser les propriétés du déterminant.
Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -9,$$

$\det B = 2 \cdot \det A = -18$, *(linéarité par rapport à la première ligne)*,
$\det C = -\det A = 9$, *(échange de deux lignes)*,
$\det D = \det A = -9$.

Pour la matrice D, l'opération élémentaire $L_1 = L_1 - L_2$ *redonne la matrice A, d'où l'égalité des déterminants.*

Exercice 9

Pour quelles valeurs de c_1, c_2, c_3 la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}$$

Indication: Montrer $\det A = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)$.
Sol.:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & c_3 & c_3^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{réduction partielle}} \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 0 & c_2 - c_1 & c_2^2 - c_1^2 \\ 0 & c_3 - c_2 & c_3^2 - c_2^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\det A = \det A^T = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)(c_3 - c_2).$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. *Ainsi A est inversible si et seulement si $c_i \neq c_j$ pour tout $i, j = 1, 2, 3$, avec $i \neq j$.*

En général, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix}$, $\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (c_j - c_i)$, *s'appelle un déterminant de Vandermonde.*

Exercice 10

Soit A et B des matrices de taille $n \times n$. Montrer que si A ou B est non inversible, alors AB est non inversible.
Sol.:

Méthode 1. On utilise qu'une matrice carrée M est inversible si et seulement si le système $Mx = b$ possède une solution unique pour tout b.

Cas 1. Supposons la matrice A non inversible. Comme A est carrée, il existe un vecteur b tel que le système $Ay = b$ ne possède pas de solution. Ensuite, on posant $y = Bx$, le système $ABx = b$ ne possède pas de solution.

Cas 2. Supposons la matrice carrée B non inversible. Il existe un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que $Bx_0 = 0$. Ensuite, on a $ABx_0 = 0$, ce qui montrer que la solution du système $ABx = 0$ n'est pas unique. Ainsi AB est non inversible.

*Méthode 2. Nous allons montrer la contraposée: Si AB est inversible, alors A **et** B sont inversibles. En effet, si AB est inversible, son inverse $C = (AB)^{-1}$ vérifie les égalités*

$$ABC = I, \quad CAB = I.$$

De la première égalité on déduit que A est inversible d'inverse BC, et de la seconde on déduit que B est inversible d'inverse CA.

Méthode 3. On utilise la propriété du déterminant $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. *Ainsi, si* $\det(A) = 0$ *ou* $\det(B) = 0$ *alors* $\det(AB) = 0$. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, d'où le résultat.* □

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2. Montrez que si A est inversible, alors $\det A = ad - bc \neq 0$.

Sol.: *Méthode 1. La matrice A est inversible si et seulement si le système $Ax = g$ a une solution pour tout vecteur $g \in \mathbb{R}^2$. La première colonne de A est nécessairement non nulle, ainsi $a \neq 0$ ou $c \neq 0$.*

Cas $a \neq 0$**.** *Une forme échelonnée de la matrice augmentée est*

$$\begin{pmatrix} a & b & g_1 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & g_2 - \frac{c}{a}g_1 \end{pmatrix}$$

S'il existe une unique solution au système, alors $\frac{ad-bc}{a}$ est un pivot, donc est non nul. Ainsi $ad - bc \neq 0$.

Cas $a = 0$**.** *On a $c \neq 0$. En échangent les lignes de la matrice, on obtient une forme échelonnée de la matrice augmentée:*

$$\begin{pmatrix} c & d & g_2 \\ 0 & b & g_1 \end{pmatrix}$$

S'il existe une unique solution au système, alors c et b sont des pivots, donc non nuls. Ainsi $bc \neq 0$.

On a donc montré dans tous les cas $ad - bc \neq 0$.

Méthode 2. D'après le cours, la matrice carrée A est inversible si et seulement si ses colonnes sont linéairement indépendantes. On a donc pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq 0.$$

On prend le cas particulier $(\lambda_1, \lambda_2) = (-b, a)$ qui est bien non nul car la première ligne de A est nécessairement non nulle. On obtient $\begin{pmatrix} 0 \\ -bc + ad \end{pmatrix} \neq 0$. D'où le résultat: $ad - bc \neq 0$.
□