Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Juin16-Durée:2h00
Rattrapage
2015-2016

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de:
Beyrouth

Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Examen De Rattrapage
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. ($15\,pts$)Trouver le D.L.à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$, et de $-\infty$ de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{|x|}$$

Solution: $f(x) = \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{|x|} = 1 + \frac{1}{2}(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}) - \frac{1}{8}(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})^2 + \frac{1}{16}(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})^3 + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{8}(\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}) + \frac{1}{16}(\frac{8}{x^3}) + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x)$

---

2. (20pts) Considérons la suite $(u_n)_n$ donnée par:

$$0 < u_0 < 1 \ \ et \ \ u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

Démontrer que $(u_n)_n$ converge vers 0

Solution: $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc (u_n) est décroissante. (5pts)

On a $0 < u_0 < 1$, supposons que $0 < u_n < 1$. $u_{n+1} = u_n(1-u_n) > 0$ car $u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$ $(5pts)$. Aussi, $u_{n+1} = u_n - u_n^2 < u_n < 1$ $(5pts)$ et donc $0 < u_{n+1} < 1$ et parsuite $0 < u_n < 1$ pour tout n. Ainsi (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente vers une limite l (3pts) qui vérifie $l = l - l^2$ donc $l^2 = 0$ et parsuite $l = 0$ $(2pts)$

---

3. (20pts) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \quad n \geq 2$

   (a) (14pts)En utilisant l'intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n-2}

   Solution: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-1} \sin x dx$. Soit $u = (\sin x)^{n-1}$ donc $du = (n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x dx$ et $dv = \sin x dx$ et donc $v = -\cos x$.

$$\begin{aligned} I_n &= -(\sin x)^{n-1}\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}\cos^2 x dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n] dx \\ &= (n-1)[I_{n-2} - I_n] \end{aligned}$$

   finalement

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

   (b) Calculer I_0, I_1 et déduire I_2 et I_3

   Solution: (6pts=1.5x4)$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$; $\quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$; $\quad I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}$; $\quad I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}$

---

4. (20pts)Calculer :

   (a) (10pts) $\displaystyle\int \frac{shx}{1+ch2x}dx$

   $I = \int \frac{d(chx)}{2ch^2x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{chx} + c$

   (b) (10pts) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\tan x}$

   Soit $t = \tan x$ donc $dt = (1+t^2)dx$ et $I = \displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}$. Soit:

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+t)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1+t}. \quad (1pts)$$

   $c + (1+t)\dfrac{at+b}{1+t^2} = \dfrac{1}{1+t^2}$ et pour $t \to -1$, on a $c = \frac{1}{2}$.$(1pts)$

   $at + b + (1+t^2)\dfrac{c}{1+t} = \dfrac{1}{1+t}$ et lorsque $t \to i \in \mathbb{C}$ on a $ai + b = \frac{1}{1+i}$ et donc

$$(a+b)i + b - a = 1$$

   soit

$$\begin{cases} b - a &= 1 \\ b + a &= 0 \end{cases}$$

   donc $b = \frac{1}{2} \quad (1pt), a = \frac{-1}{2}$ (1pt) et

   $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{-t+1}{1+t^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{4}\ln(1+t^2)(2pts) + \frac{1}{2}\arctan t \quad (2pts) + \frac{1}{2}\ln(1+t) \quad (2pts) + c$

Choisissez de répondre à une de deux questions 5 ou 6 suivantes:

5. (25 pts)On considère l'équation différentielle de premier ordre

$$y' + 2xy = e^{x^2}.y^2 \qquad (1)$$

Vérifier, en utilisant le changement de variable $z(x) = y^{-1}(x) = \frac{1}{y(x)}$, que l'équation (1) est équivalente à l'équation différentielle linéaire de premier ordre en $z(x)$:

$$z' - 2xz = -e^{x^2} \qquad (2)$$

Trouver la solution $z(x)$ de l'équation (2) et en déduire celle de (1)

Solution:(8pts) $z'(x) = -y^{-2}y'(x)$.

On a

$$\begin{aligned} y^{-2}y' + 2xy^{-1} &= e^{x^2} \\ -z' + 2xz &= e^{x^2} \\ z' - 2xz &= -e^{x^2} \end{aligned}$$

(5pts):Soit l'équation $z' - 2xz = 0$ (3) et donc $\dfrac{z'}{z} = 2x$ soit $\ln z = x^2 + cte$ et $z = ce^{x^2}$ est la SG de (3)

(8pts): Soit $z(x) = f(x)e^{x^2}$ la SG de (2). On a $z' = f'(x)e^{x^2} + 2xf(x)e^{x^2}$. Par substitution dans (2) on obtient:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \\ f(x) &= -x + c \end{aligned}$$

et donc

$$z = (-x+c)e^{x^2}$$

est la SG de (2)

6. (25pts)Résoudre l'équation différentielle linéaire de deuxième ordre

$$y^{''} - 2y^{'} + 5y = \cos 2x \qquad (1)$$

En déduire la solution de (1) qui vérifie : $y(0) = \frac{1}{17}$ et $y^{'}(0) = 0$

Solution: (7pts) Soit l'équation caractéristique: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ (3) dont $\lambda = 1 + 2i$ est une racine complexe et

$$y_g = e^x(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))$$

est la SG de l'équation homogène(2) associée à (1) :

$$y^{''} - 2y^{'} + 5y = 0 \quad (2)$$

(10pts): $f(x) = \cos 2x$ est de la forme $e^{\alpha x}(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x)$ avec $\alpha = 0, \beta = 2,\ p = 1, q = 0$. de sorte que $\alpha + i\beta = 2i$ n'est pas une racine de (3). On pose

$$y_p(x) = a\cos 2x + b\sin 2x, \qquad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

comme solution particulière de (1).
$y_p^{'} = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x;\quad y^{''} = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x = -4y_p(x)$. Par sibustitution dans (1) on obtient:

$$\begin{aligned} y_p - 2y_p^{'} &= \cos 2x \\ \cos 2x(a - 4b) + \sin 2x(b + 4a) &= \cos 2x \end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases} a - 4b &= 1 \\ 4a + b &= 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{17};\ b = \frac{-4}{17}$ et $y_p = \frac{1}{17}(\cos 2x - 4\sin 2x)$
(3pts): la SG de (1) est $y = y_p + y_g = e^x(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)) + \frac{1}{17}(\cos 2x - 4\sin 2x)$
(5pts):On a $y(0) = \frac{1}{17}$; et donc $c_1 e^x + \frac{1}{17} = \frac{1}{17}$ càd $c_1 = 0$ et $y = c_2 e^x \sin 2x + \frac{1}{17}(\cos 2x - 4\sin 2x)$.

$$y^{'} = c_2(e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x) + \frac{2}{17}(-\sin 2x - 4\cos 2x)$$

$y^{'}(0) = 0$ donc $2c_2 - \frac{8}{17} = 0$ et $c_2 = -\frac{4}{17}$.
La solution de (1) qui vérifie les conditions initiales est

$$y = -\frac{4}{17}e^x\sin 2x + \frac{1}{17}(\cos 2x - 4\sin 2x).$$
