

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Final
Base de l'analyse réelle - MVA010

1. (5pts) Soit $f(x) = \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{2-x+x^2}}{x}$. Utiliser le DL de f en $+\infty$ pour donner l'équation de l'asymptote à la courbe de f ainsi que sa position.

Solution: $f(x) = \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} - x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = (1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon) - (1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon$. (4pts) Il en vient que x est une asymptote et comme $\frac{1}{x} > 0$ alors la courbe est au dessus de l'asymptote (0.5 + 0.5pt)

2. (5pts) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_1 > 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2u_n}$$

- (a) Démontrer que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Solution: $u_1 > 0$, par récurrence si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n > 0$ (0.5pt)

- (b) Démontrer que (u_n) est minorée par 1 et vérifier qu'elle est décroissante

Solution: on a $u_1 > 1$, par récurrence si $u_n > 1$ alors $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n} > 0$ et donc (u_n) est minorée par 1 (1.5pt). D'autre

part, $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n^2}{2u_n} < 0$ car $0 < u_n < 1$ et par suite (u_n) est décroissante (1.5pt)

(c) Déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite

Solution: (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente (0.5pt), soit $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. On a $l = \frac{1+l^2}{2l}$ et donc $l^2 = 1$ et donc $l = 1$ car $u_n > 0, \forall n$ (1pt)

3. (5pts) On pose

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx; \quad I_2 = \int \frac{\sin(2x)}{1 + 2 \sin x} dx$$

et soit $I = I_1 + I_2$.

(a) Calculer I_1

Solution: $I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2 \sin x)}{1+2 \sin x} = \frac{1}{2} \ln(1 + 2 \sin x) + c$ (1pt)

(b) Calculer I_2

Solution: $I = 2 \int \frac{\sin x \cos x}{1 + 2 \sin x} dx = 2 \int \frac{t dt}{1 + 2t} = \int \frac{2t + 1 - 1}{2t + 1} dt = t - \frac{1}{2} \ln(2t + 1) + c = \sin x - \frac{1}{2} \ln(2 \sin x + 1) + c$ (2pts)

(c) Déduire I

solution: $I = I_1 + I_2 = \sin x + c$ (1pt)

(d) Retrouver I directement.

Solution: $I = \int \frac{\cos x + 2 \sin x \cos x}{1 + 2 \sin x} dx = \int \cos x dx = \sin x + c$ (1pt)

4. (5pts) On considère l'équation différentielle de premier ordre en $y = y(x)$:

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2} + e^{\frac{xy}{2}} \quad (1)$$

(a) (1pt) Vérifier, en utilisant le changement de variable $z = e^{xy}$, que l'équation (1) est équivalente à l'équation en $z = z(x)$:

$$z' + \frac{1}{x}z = xz\sqrt{z} \quad (2)$$

Solution: $z'(x) = (y + xy')e^{xy}$. En remplaçant dans (2) on obtient:

$$(y + xy')e^{xy} + \frac{1}{x}e^{xy} = xe^{xy}e^{\frac{xy}{2}}.$$

donc $y + xy' + \frac{1}{x} = xe^{\frac{xy}{2}}$ par suite $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2} + e^{\frac{xy}{2}}$

(b) Résoudre l'équation (2) et déduire la solution générale de l'équation (1)

Barème: (équivalence avec une équation linéaire:1pt; ESSM: 1pt; SG: $f(x)$: 1pt et $u(x)$: 0.5pt; la SG $y(x)$: 0.5pt.)

Solution: L'équation (2) est une équation de Bernoulli, elle est équivalente à

$$z^{-\frac{3}{2}}z' + \frac{1}{x}z^{-\frac{1}{2}} = x \quad (3)$$

On pose $u(x) = z^{-\frac{1}{2}}$, donc $u' = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z'$ et l'équation (3) est équivalente à l'équation linéaire en $u(x)$:

$$\begin{aligned} -2u' + \frac{1}{x}u &= x \\ u' - \frac{1}{2x}u &= -\frac{1}{2}x \quad (4) \end{aligned}$$

La S.G. de l'ESSM associée à (4) est $u(x) = k \exp(\int \frac{1}{2x} dx) = k\sqrt{x}$. Cherchons $f(x)$ telle que $u = f(x)\sqrt{x}$ est la S.G. de (4).

Il en vient:

$$f'(x)\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x$$

donc $f(x) = -\frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx = -\frac{x\sqrt{x}}{3} + c$ et la S.G. de (4) est

$$u = -\frac{1}{3}x^2 + c\sqrt{x}$$

La S.G de (2) est $z = \frac{1}{(-\frac{1}{3}x^2 + c\sqrt{x})^2}$ et donc la S.G. de (1) est $y = \frac{-2}{x} \ln(-\frac{1}{3}x^2 + c\sqrt{x})$