

Est autorisé:  
 Calculatrice Non Programmable

**Partiel**  
**Base de l'analyse Mathématique - MVA010**

1. (25 pts) soit la fonction réelle

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x} - 2 \cos x}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Donner le développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 1, en déduire que  $f$  est continue en 0

Solution: (ordre 2 pour le numérateur et le dénominateur: 2pts)+(DL de  $\sqrt{4+x}$ : 6pts)+(DL de  $\cos x$ : 2pts) + (DL du numérateur:3pts)+(DL de  $f(x)$  à  $n = 1$ : 6pts) + (continuité:2pts)

$\sqrt{4+x} - 2 \cos x = \sqrt{4(1 + \frac{x}{4})} - 2 \cos x = 2[(1 + \frac{1}{2}(\frac{x}{4}) - \frac{1}{8}(\frac{x}{4})^2 + x^2\varepsilon(x)) - 2(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x))]$ ,  
 donc

$$\sqrt{4+x} - 2 \cos x = \frac{x}{4} + \frac{63}{64}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

il en vient que  $f(x) = \frac{\frac{x}{4} + \frac{63}{64}x^2 + x^2\varepsilon(x)}{x + x^2\varepsilon(x)} = \frac{1}{4} + \frac{63}{64}x + x\varepsilon(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4} = f(0)$  donc  $f$  est continue en 0

(b) Déduire l'équation de la tangente en 0 à la courbe de  $f$

Solution: (4pts)

$$(T) : y = \frac{1}{4} + \frac{63}{64}x$$

2. (20pts) On considère la fonction  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ,  $x \neq 0$

Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a:

$$\frac{f(x+1)}{(x+1)^2} < f(x) - f(x+1) < \frac{f(x)}{x^2}$$

En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})]$

Solution:(Application du TAF sur  $[x, x+1]$ : 6pts) + (majoration: 10pts)+(limite:4pts)

La fonction  $f(t)$  vérifie les conditions du T.A.F, sur  $[x, x+1]$  pour tout  $x > 0$ . Il existe donc un  $c \in ]x, x+1[$  tel que

$$f(x+1) - f(x) = f'(c) = -\frac{1}{c^2}e^{\frac{1}{c}}$$

c.à.d.  $f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2}e^{\frac{1}{c}}$ . Or  $x < c < x+1$  donc  $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$  et alors

$$\frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{c^2} < \frac{1}{x^2}$$

$$e^{\frac{1}{x+1}} < e^{\frac{1}{c}} < e^{\frac{1}{x}}$$

D'où:  $\frac{f(x+1)}{(x+1)^2} < f(x) - f(x+1) < \frac{f(x)}{x^2}$ .

On en déduit que

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} < x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) < e^{\frac{1}{x}}$$

et par passage à la limite en l'infini:  $1 \leq \lim x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) \leq 1$  et par suite  $\lim x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) = 1$

---

3. (25pts)

(a) Donner le D.L de  $\frac{1}{1+x}$  en l'infini à l'ordre 3

Solution: (5pts)

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{1}{x} [1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon(x)] = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon(x)$$

(b) Déduire le D.L de  $\ln(\frac{x}{1+x})$  en l'infini à l'ordre 2

Solution:  $(\ln(1+t) : 2pts) + (\ln(\frac{x}{1+x}) : 8pts)$

$$\ln(\frac{x}{1+x}) = \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon(x)) = (-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^2 + \frac{1}{x^2} \varepsilon(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon(x)$$

(c) Déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe de la fonction  $f(x) = x \ln(\frac{x}{1+x})$ , ainsi que sa position relativement à la courbe.

Solution: (asymptote: 2pts) + (position: 3pts)

$f(x) = -1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon(x)$  ainsi  $y = -1$  est une A.H et  $f(x) - y \sim \frac{1}{2x}$  et donc la courbe de  $f$  est au dessus de l'asymptote en  $+\infty$  et en dessous de l'asymptote en  $-\infty$ .

---

4. (30pts) Soient  $a, b$  deux réels strictement positifs. On pose  $u_0 = a, v_0 = b$  et pour tout  $n$ ,

$$\begin{cases} \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

Solution:  $(u_n > 0 \text{ et } v_n > 0 : 4pts) + (v_n > u_n : 7pts) + ((u_n) \nearrow : 7pts) + ((v_n) \searrow : 7pts) + (\text{limite} : 5pts)$

On a  $u_{n+1} = 2 \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ .

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - 2 \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \end{aligned}$$

or  $u_0 > 0$  et  $v_0 > 0$  donc si par récurrence, on a  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$  alors  $u_{n+1} = 2 \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} > 0$  et

$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$  et donc  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$  pour tout  $n$  et par suite  $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$  pour tout  $n \geq 0$ .

$u_{n+1} - u_n = 2 \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n (v_n - u_n)}{u_n + v_n} \geq 0$  et donc  $(u_n)$  est croissante

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$  et donc  $(v_n)$  est décroissante. Comme  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $v_1$  et  $(v_n)$  est décroissante et minorée par  $u_1$  alors les deux suites sont convergentes. Soit  $l = \lim u_n$  et  $l' = \lim v_n$ . On a  $\lim v_{n+1} = \lim \frac{u_n + v_n}{2}$  alors  $l' = \frac{l+l'}{2}$  donc  $l = l'$ . On en déduit que les deux suites sont adjacentes.

---