

Base de l'analyse réelle (MVA010)
Final 2020-2021 ⌚ 2h :



Téléphone et Calculatrice programmable sont interdits

Examen proposé par : J.SAAB
pour les centres de Beyrouth, Baalbek, Nahr Ibrahim.

Exercice 1 (20 points) : Soit la fonction réelle

$$f(x) = \frac{e^x - \cos x}{\sinh x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. On voudrait développer f à l'ordre 3 au voisinage de 0. Expliquer pourquoi f admet un développement limité généralisé en 0.
3. Pour avoir un D.L.G. de f à l'ordre 3, jusqu'à quel ordre faudrait-il développer chacune de ses composantes ?
4. Donner le D.L.G. de f en 0 à l'ordre 3.
5. Dédurre que f est prolongeable par continuité en 0 et donner la fonction $g(x)$, prolongement de $f(x)$ par continuité en 0.
6. Quelle est l'équation de la tangente en 0 à la courbe de g ainsi que sa position par rapport à cette courbe

 **SOLUTION. 1**

1. $\sinh x \neq 0$ donc $x \neq 0$ (2 pts)
2. Le premier terme du D.L. de $e^x - \cos x$ est x de degré $k = 1$, celui de $\sinh x$ est x de degré $l = 1$. Comme $k \geq l$ donc f admet un D.L.G. en 0. (3 pts)
3. Pour avoir un D.L.G. de f à l'ordre 3 il faut développer chacune de ses composantes à l'ordre $3 + l = 3 + 1 = 4$. (2 pts)
4.
$$f(x) = \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x))}{x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)} = \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)}{x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)}$$

$$\frac{1 + x + \frac{x^2}{6} + x^3\varepsilon(x)}{1 + \frac{x^2}{6} + x^3\varepsilon(x)} =$$

$$\left[1 + x + \frac{x^2}{6} + x^3\varepsilon(x)\right] \left[1 - \frac{x^2}{6} + x^3\varepsilon(x)\right] = 1 + x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x). \quad (8 \text{ pts})$$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ finie, donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos x}{\sinh x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2 \text{ pts})$$

6. $g(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$, $\forall x \in V(0)$, $y = 1 + x$ est l'équation de la tangente à (C_g) en 0 (1 pt). $g(x) - y \simeq -\frac{x^3}{6}$ qui est négative à droite de 0 et positive à gauche de 0. La tangente traverse la courbe. (C_g) est au dessous de (T) à droite de 0 et au dessus de (T) à gauche de 0. (0 est un point d'inflexion). (2 pts)



Exercice 2 (20 points) On définit la suite récurrente (u_n) par

$$u_{n+1} = \frac{7u_n - 5}{u_n + 1} \text{ avec } u_0 = 8.$$

- Soit $f(x) = \frac{7x - 5}{x + 1}$. Calculer la dérivée de f et vérifier que f est croissante sur son domaine de définition.
 - Sachant que $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$. Utiliser a) pour montrer que $u_n \geq 5$ et que (u_n) est décroissante..
 - En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.
- Montrer par récurrence que $0 \leq u_n - 5 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

SOLUTION. 2

- $f'(x) = \frac{12}{(x+1)^2} > 0$, $\forall x \neq -1$, donc f est croissante sur son domaine. (2 + 1 = 3 pts)
 - $u_0 = 8 \geq 5$ supposons par récurrence que $u_n \geq 5$ et montrons que $u_{n+1} \geq 5$?
En effet, $u_n \geq 5$ et f est croissante donc $f(u_n) \geq f(5) = \frac{30}{6} = 5$ donc $u_{n+1} \geq 5$ et par suite $u_n \geq 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (4 pts)
D'autre part, $u_1 = f(u_0) = f(8) = \frac{56-5}{9} = \frac{17}{3} < 8 = u_0$. Supposons par récurrence que $u_n < u_{n-1}$ et montrons que $u_{n+1} < u_n$?
En effet, $u_n < u_{n-1}$ et f est croissante donc $f(u_n) < f(u_{n-1})$ c'est à dire $u_{n+1} < u_n$ et (u_n) est décroissante. (4 pts)
 - (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ (1 pt), comme f est continue sur $[5, 8]$ alors $l = f(l)$ (1 pt) c.à.d

$$l^2 - 6l + 5 = 0$$

$l = 1$ est à rejeter ($u_n \geq 5$), donc $l = 5$. (1 pt)

- $u_{n+1} - 5 = \frac{7u_n - 5}{u_n + 1} - 5 = \frac{2u_n - 10}{u_n + 1} \leq \frac{2}{6}(u_n - 5) \forall n \in \mathbb{N}$, car $u_n \geq 5$ (2 pts). On a

$$u_1 - 5 \leq \frac{1}{3}(u_0 - 5)$$

$$u_2 - 5 \leq \frac{1}{3}(u_1 - 5)$$

\vdots

$$u_n - 5 \leq \frac{1}{3}(u_{n-1} - 5)$$

et par multiplication membre à membre et après simplification, on obtient

$$u_n - 5 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_0 - 5) \quad (2 \text{ pts})$$

$$u_n - 5 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ car } u_0 = 8. \quad (1 \text{ pt})$$

D'où $0 \leq u_n - 5 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

3. $0 \leq \lim(u_n - 5) \leq \lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$, d'où $\lim u_n = 5$. (1 pt)



Exercice 3 (25 points) Calculer :

1. $\int \frac{3x+2}{x^2+3x+5} dx$
2. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$
3. $\int \frac{2 \sin x \cos x}{4-4 \sin x - \cos^2 x} dx$

SOLUTION. 3

1. $x^2+3x+5 : \Delta = 9-20 < 0$. $x^2+3x+5 = (x+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 5 = \frac{11}{4} + (x+\frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4} \left[1 + \left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2\right]$.

$$\int \frac{3x+2}{x^2+3x+5} dx = 3 \int \frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+3x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+3-3+\frac{4}{3}}{x^2+3x+5} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+3x+5) - \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x^2+3x+5}.$$

$$\text{Soit } J = \int \frac{dx}{x^2+3x+5} = \frac{4}{11} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{4}{11} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{11}} dx}{1 + \left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right) + c \quad (10 \text{ pts})$$

2. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}} = \arg \cosh e^x + c \quad (5 \text{ pts})$

3. $f(\pi-x) = -f(x)$, soit $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \frac{2 \sin x \cos x}{4-4 \sin x - \cos^2 x} dx = \int \frac{2t dt}{4-4t-1+t^2} = \int \frac{2t dt}{t^2-4t+3}.$$

$$\frac{2t}{t^2-4t+3} = \frac{2t}{(t-1)(t-3)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t-3}. \text{ Ainsi } a = -1, b = 3.$$

$$\int \frac{2 \sin x \cos x}{4-4 \sin x - \cos^2 x} dx = -\int \frac{dt}{t-1} + 3 \int \frac{dt}{t-3} = 3 \ln(t-3) - \ln(t-1) + c = 3 \ln k \frac{(\sin x - 3)^3}{\sin x - 1}. \quad (10 \text{ pts})$$



Exercice 4 (15 points) Utiliser un changement de variable convenable pour montrer que pour toute fonction intégrable f , on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

Déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

SOLUTION. 4

Soit $t = a + b - x$, $dt = -dx$. On a

$$\int_a^b f(a + b - x) dx = \int_b^a f(t)(-dt) = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx. \quad (3 \text{ pts})$$

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \sin(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)} dx \quad (2 \text{ pts}) = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (3 \text{ pts}) = -\pi \arctan(\cos x) \Big|_0^\pi - I \quad (3 \text{ pts})$$

$$I = \frac{-\pi}{2} \left[-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi^2}{4} \quad (4 \text{ pts})$$

Exercice 5 (20 points)

1. Résoudre l'équation de Bernoulli suivante : $xy' = 3y + x^5 y^{\frac{1}{3}}$
2. Résoudre l'équation de second ordre $y'' + y = \cos 2x$

SOLUTION. 5

1. $y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{1/3}$ ou $y^{-1/3} y' - \frac{3}{x} y^{2/3} = x^4 \quad (B)$

Soit $z = y^{2/3}$ donc $z' = \frac{2}{3} y^{-1/3} y'$ (2 pts) et (B) devient : $\frac{3}{2} z' - \frac{3}{x} z = x^4$ ou $z' - \frac{2}{x} z = \frac{2}{3} x^4 \quad (L)$ qui est une équation linéaire en $z(x)$. (1 pt)

La S.G. de l'ESSM $z' - \frac{2}{x} z = 0$ est $z = \exp \int \frac{2}{x} dx = kx^2$. (2 pts)

Posons $z = f(x) \cdot x^2$ la S.G. de (L), (1 pt) on a $z' = f'(x) \cdot x^2 + 2xf(x)$ et (L) donne : $f'(x) \cdot x^2 = \frac{2}{3} x^4$ (1 pt) donc $f(x) = \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} + c$. (1 pt) Soit $z = \frac{2}{9} x^5 + cx^2$ la S.G. de (L) (1 pt) et par suite la S.G. de (B) est $y = z^{3/2} = \left(\frac{2}{9} x^5 + cx^2 \right)^{3/2}$. (1 pt)

2. $y'' + y = \cos 2x \quad (L)$

La S.G. de (L) est $y = y_g + y_p$

y_g est la S.G. de $y'' + y = 0$ (2) d'équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$ (3); $r = i$ est une racine de (3)

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (3 \text{ pts})$$

y_p est une S.P. de (L). On a $f(x) = \cos 2x$ et $2i$ n'est pas racine de (3) donc on pose

$$y_p = a \cos 2x + b \sin 2x \quad (2 \text{ pts})$$

On a $y_p = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x$ et $y_p'' = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x = -4y_p$.

$y_p'' + y_p = \cos 2x \implies -3(a \cos 2x + b \sin 2x) = \cos 2x$ donc $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$ et $y_p = -\frac{1}{3} \cos 2x$. (4 pts) Par suite

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x$$

est la S.G. de (L). (1 pt)