

1. Soit  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ,  $x \neq 0$ . la fonction  $f$  admet - elle une limite en 0.

2. Trouver les limites suivantes:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x}{x-3} & c) \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k+x}-\sqrt{k-x}}{x}, \quad k > 0 & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x) & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-3x+2}{x^2-x} \\ g) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x^3}\right) & & \end{array}$$

3. Etudier quand  $x \rightarrow -1$ , la limite de  $f(x) = \frac{\sqrt{1-3x}-2}{|x+1|}$

4. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on définit la partie entière de  $x$  :

$$E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Considérons aussi les fonctions:

$$f(x) = E(x), \quad g(x) = \sqrt{x - E(x)} \quad h(x) = \frac{x E(x+1)}{x + E(x)}$$

a) Tracer le graphe de chacune des fonctions suivantes:  $f, g, f + g$ , pour  $x \in [0, 5]$

b) Etudier la continuité de  $f, g, f + g$  et  $h$  au point 1.

5. Soient

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} x - E(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est - elle continue en 0? d'un côté de 0? même question pour la fonction  $g$

6. Soit  $f(x) = E(x) + E(2-x)$

a) Montrer que  $f$  est périodique de période 1

b) Montrer que  $f$  est paire

c) Déterminer le domaine de continuité de  $f$

7. Examiner si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité au point 1

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

8. Discuter en fonction de la valeur de  $n \in \mathbb{N}$ , si la fonction

$$f(x) = x^n \ln x$$

peut être prolongeable par continuité en 0

9. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Quelle doit être la valeur de  $f$  au point 1 pour qu'elle soit continue sur  $[0, 2]$

10. a) Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue. Démontrer qu'il existe un élément  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) = x_0$

b) Soit  $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue vérifiant  $g(0) = g(2)$ . Démontrer qu'il existe  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $g(\alpha+1) = g(\alpha)$

11. Montrer que :

i)  $|xy| = |x||y|$

ii)  $|x - x_0| < \delta \iff x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad (\delta > 0)$

iii)  $|x| > \delta \iff x > \delta \text{ ou } x < -\delta$

12. Trouver l'ensemble de solutions dans chacun des cas suivants:

i)  $|2x - 3| < 1$

v)  $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$

ii)  $(x - 2)^2 \geq 4$

vi)  $|x| = x + 1$

iii)  $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

vii)  $|x| = x - 1$

iv)  $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$

13. Montrer que :

i)  $[|x - 2| < \delta \text{ et } 0 < \delta < 3] \implies \frac{1}{|x - 5|} < \frac{1}{3 - \delta}$

ii)  $[|x - 2| < \delta \text{ et } 0 < \delta < 1] \implies \frac{|x + 1|}{|x - 1|} < \frac{3 + \delta}{1 - \delta}$

iii)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$

14. Calculer la dérivée à gauche et la dérivée à droite, au point indiqué, de chacune des fonctions suivantes:

a)  $f(x) = |x - 1| + x - 1$  au point  $x = 1$

b)  $g(x) = |x^2 - 1| + 3x$  au point  $x = -1$

15. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

a)  $\ln \frac{1 + \ln \frac{x}{2}}{1 - \ln \frac{x}{2}}$

b)  $x \ln x + \sqrt{1 - x^2}$

16. Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$  et telle que, pour tous  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , on a:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < c|x_1 - x_2|^{1+\alpha}; \quad c, \alpha > 0$$

Démontrer que  $f$  est constante

17. Soit  $f$  une fonction définie et dérivable pour  $x > c$ . On suppose que  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Montrer que, pour tout  $h > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+h) - f(x)) = 0$

18. Simplifier les expressions suivantes:

a)  $\exp\left[\frac{(3 \ln 2)}{2}\right]$

b)  $\exp[\ln(x - 1)]$

19. Calculer le maximum et le minimum de

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x - 5, \quad \text{pour } x \in [-2, 6]$$

En déduire le maximum et le minimum de  $|f(x)|$

20. a) Les conditions de Rolle sont - elles vérifiées par la fonction

$$f(x) = (|x| - 1)^2, \quad x \in [-1, 1]$$

b) Les conditions du T.A.F. sont - elles vérifiées par la fonction

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [-1, 1]$$

21. Soient, pour  $x > 0$

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x+1}$$

$$g(x) = \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x}$$

Appliquer à  $\ln u$  le T.A.F. sur un intervalle convenable, pour déterminer le signe de  $f$  et celui de  $g$