Institut des Sciences Appliquées et Économiques ISAE-Cnam Liban *Centre du Liban Associé au CNAM de Paris*	Date:Septembre-Durée:2h Final 2014-2015	Sujet coordonné par: J.Saab Proposé pour les centres d'enseignement de: Beyrouth-Baakline-Baalbek-Ghazza- Tripoli-Bickfaya Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Final
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. (20 *pts*)

   (a) Donner le D.L. de $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 en déduire le D.L de $\arctan x$ au voisinage de 0 à l'ordre 5

   (b) Soit $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\sin x}$. Développer f en 0 à l'ordre 2, en déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement admet une droite tangente à sa courbe en 0 qui est parallèle à l'axe des abscisses

   (c) Donner une valeur approchée de $\arctan(0.3)$

Solution:

(a) (2Pts+5pts)$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$ et donc $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$

(b) (6pts pr le DL; 2pts pr le prolongeent; 2pts pour la tangente)

$f(x) = \dfrac{x - \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)} = \dfrac{1 - \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)} = (1-\frac{x^2}{3}+x^2\varepsilon(x))(1+\frac{x^2}{6}+x^2\varepsilon(x)) = 1-\frac{1}{6}x^2+x^2\varepsilon(x)$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(1 - \frac{1}{6}x^2 + x^2\varepsilon(x)) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{\sin x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On a $g(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ au voisinage de 0 et donc $y = 1$ qui est parallèle à l'axe des x est la tangente à la courbe de g en 0

(c) (3pts) $\arctan(0.3) \simeq 0.3 - \frac{0.3^3}{3} + \frac{0.3^5}{5} \simeq 0.291\,49$

---

2. (20pts) On considère les suites (u_n)

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}, \quad u_0 = 1$$

   (a) Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-3} près de chacun des termes u_1, u_2 et u_3

   (b) Montrer par récurrence sur n que $0 < u_n < 2$ pour tout $n \geq 0$

   (c) Montrer que $-x^2 + x + 2 \geq 0$ pour tout $x \in [0, 2]$

   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$ en déduire que $|u_n - 2| \leq \dfrac{1}{2^n}$

(e) Déduire la nature de (u_n) et donner sa limite

(f) Montrer que (u_n) est croissante en déduire sa nature et en retrouvant sa limite

---

Solution:

(a) (1.5pt) $u_1 = 1.6666;\ u_2 = 1.9090;\quad u_3 = 1.9767$

(b) (4pts) On a $0 < u_0 < 2$ supposons par récurrence que $0 < u_n < 2$. On a $u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{u_n+2}$. Or $2 < u_n + 2 < 4$ et donc $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{u_n+2} < \frac{1}{2}$ ainsi $-2 < \dfrac{-4}{u_n+2} < -1$ et parsuite

$$1 < u_{n+1} < 2 \text{ parsuite } 0 < u_{n+1} < 2$$

On en déduit que pour tout n on a $0 < u_n < 2$

(c) (2pts) Les racines sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$ ainsi $-x^2 + x + 2 \geq 0$ pour tout $x \in [-1, 2]$ et donc $-x^2 + x + 2 \geq 0$ pour $0 \leq x \leq 2$

(d) (4pts+3pts)On a $u_{n+1} - 2 = 1 - \dfrac{4}{u_n+2} = \dfrac{u_n-2}{u_n+2}$, ainsi $|u_{n+1} - 2| = |\dfrac{u_n-2}{u_n+2}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$ car $|u_n + 2| \geq 2$.

$$\begin{aligned}
|u_n - 2| &\leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - 2| \\
|u_{n-1} - 2| &\leq \frac{1}{2}|u_{n-2} - 2| \\
&\ \vdots \\
|u_1 - 2| &\leq \frac{1}{2}|u_0 - 2|
\end{aligned}$$

par multiplication membre à membre on en tire

$$|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - 2| = \frac{1}{2^n}$$

(e) On a $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |u_n - 2| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$ c'est donc une suite convergente qui converge vers 2

(f) (3pts+1pt+1.5pt) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2} \geq 0$ d'après c) car $0 \leq u_n \leq 2$ ainsi (u_n) est croissante et comme elle est majorée par 2 alors elle devient convergente. Soit $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. On a

$$l = \frac{3l+2}{l+2} \text{ c'est à dire } -l^2 + l + 2 = 0$$

on obtient, $l = -1$(à rejetter car $u_n \geq 0$) ou $l = 2$ acceptée.

---

3. (20pts) Résoudre les équations differentielles en $y(x)$ suivantes:

(a) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$

(b) $y' = y(xy^3{+}1)$

Solution:

(a) (y_G : 3pts; y_p : 5pts; y :2pts)
ET1: ESSM.: $y^{''} - 2y^{'} + y = 0$
Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$. c'est à dire $(r-1)^2 = 0$. on a donc une racine réelle double $r = 1$. La S.G. de l'ESSM est

$$y_G = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Et 2: SP de l'équation initiale (I):
Le second membre est $f(x) = (x^2+1)e^x$ est produit d'un polynôme de degré 2 et de l'exponentielle de x. Comme $\alpha = 1$ est une racine de l'équation caratéristique alors posons

$$y_p = x^2(ax^2 + bx + c)e^x$$

une soluion particulière de (I)
On a

$$\begin{aligned} y^{'} &= (ax^4 + (4a+b)x^3 + (3b+c)x^2 + 2cx)e^x. \\ y" &= (ax^4 + (8a+b)x^3 + (12a+6b+c)x^2 + (6b+4c)x + 2c)e^x. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (I) on trouve $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = \frac{1}{2}$ et donc

$$y_p = (\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2)e^x$$

et la solution générale de (I) est $y = y_G + y_p$

(b) (passage de (B) à (L) :3pts; solution de (L) :5pts; solution de (B): 2pts) $y^{'} - y = xy^4$ (B) est une équation de Bernouilli d'ordre 4 On obtient

$$y^{-4}y^{'} - y^{-3} = x$$

Posons $z = y^{-3}$ donc $z^{'} = -3y^{-4}y^{'}$ et l'équation (B) est équivalente à

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}z^{'} - z &= x \\ z^{'} + 3z &= -3x \quad (L) \end{aligned}$$

Posons $u = z + x$ et donc $u^{'} = z^{'}$, on obtient

$$u^{'} + 3u = 0$$

la solution est $u = ce^{-3x}$ donc $z = ce^{-3x} - x$ et la solution générale de (B) est $y^3 = \dfrac{1}{ce^{-3x} - x}$

4. (20pts) Calculer

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$

Solution:

(a) (10pts)$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 = 4[1 + (\frac{x-1}{2})^2]$ et $I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+(\frac{x-1}{2})^2} = \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{\frac{1}{2}dx}{1 + (\frac{x-1}{2})^2} =$ $\frac{1}{2}\arctan(\frac{x-1}{2}) + c$

(b) (10pts) Soit $f(x) = \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$, on a $f(\pi - x) = -f(x)$. Posons $t = \sin x,\ dt = \cos x dx$

$$I = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + c = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c$$

5. (20pts) On définit, pour tout entier $n > 0$ et tout $x > 0$:

$$\phi_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n dt$$

(a) (14pts) Etablir une relation entre $\phi_n(x)$ et $\phi_{n-1}(x)$

(b) (6pts=2+2+2)Donner l'expression de ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3

Solution:

(a) Soit $u = (\ln t)^n$ donc $du = n(\ln t)^{n-1}\frac{1}{t}dt$; $dv = dt$ et $v = t$

$$\phi_n = t(\ln t)^n]_1^x - n\int_1^x (\ln t)^{n-1}dt$$

on obtient

$$\phi_n = x(\ln x)^n - n\phi_{n-1}(x)$$

(b) $n = 1 : \phi_1(x) = x\ln x - \int_0^x dt = x\ln x - x$
$n = 2 : \phi_2(x) = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x)$
$n = 3 : \phi_3(x) = x(\ln x)^3 - 3[x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x)]$