

1. Résoudre les systèmes différentiels suivants (La variable indépendante étant t)

(a)

$$\begin{cases} x' &= x - y - z \\ y' &= x - y \\ z' &= x - z \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x' &= 3x - y + z \\ y' &= 2x + z \\ z' &= x - y + 2z \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + y + z \\ z' &= y + z \end{cases} \text{ avec } X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{cases} x' &= 2x + y + \sin t \\ y' &= x + z \\ z' &= -2y + 2z + \cos t \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} x' &= x - 2y + e^t \\ y' &= x + 4y + e^{2t} \end{cases}$$

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Exprimer, par récurrence, $A^n, n \geq 1$, en fonction de A et n

(b) En déduire $\exp(At)$ en fonction de A et t .

(c) Déduire la solution du système différentiel linéaire $X'(t) = A.X(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = A + I$$

(a) Montrer que $e^{-It} = Ie^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

(b) Calculer $B^n, n \in \mathbb{N}$ en déduire que B est nilpotente

(c) Calculer e^{Bt} et en déduire e^{At}

(d) Déduire la solution du système différentiel linéaire $X'(t) = A.X(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$
