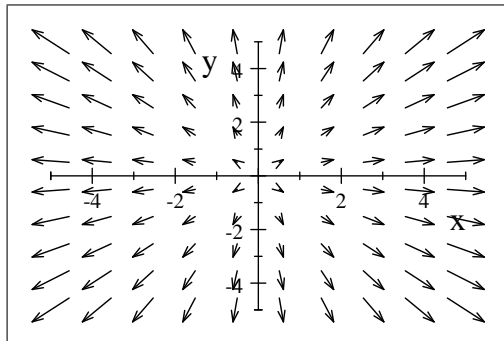
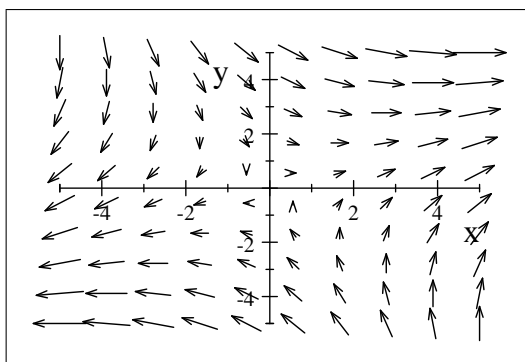


1. Soit $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^2 . Trouver les courbes intégrales de X . Donner une représentation géométrique.



2. Soit $X = e^{-x} \frac{\partial}{\partial x}$ un champ de vecteur sur \mathbb{R}^2 . Donner les courbes intégrales associé à X .



3. On considère les champs X, Y sur \mathbb{R}^3 :

$$X = (x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} + xz \frac{\partial}{\partial z}; \quad Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2xz^2 \frac{\partial}{\partial z}$$

- (a) Les champs X, Y sont-ils des champs de vecteurs sur $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$?
 (b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (u = x^2 - 1, v = yz)$$

Trouver les points $p(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f_{*,p}X_p = (u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v})_{f(p)}$.

4. On se donne sur \mathbb{R}^2 les champs de vecteurs:

$$X = \sin(xy) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$Y = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$$

on se donne les formes différentielles

$$\alpha = 2ydx - 3dy; \quad \beta = dx - 2xdy$$

Calculer: $\alpha \wedge \beta$ et puis $(\alpha \wedge \beta)(X, Y)$

5. Soit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. et Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, la première projection

(a) Montrer que $X(x, y) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \frac{\partial}{\partial y}$ est un champ C^∞ sur M

(b) Donner la matrice associée à f_* relativement aux bases $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ et $\{\frac{d}{dt}\}$ de $\chi(M)$ et $\chi(\mathbb{R})$ respectivement.
En déduire $(f_*)_q(X_q)$ où $q = (1, 0)$

(c) Vérifier que si $p, p' \in M$ tel que $f(p) = f(p')$ et $p \neq p'$ alors $(f_{*p})(X_p) \neq (f_{*p'})(X_{p'})$

6. On considère dans \mathbb{R}^3 le champs $X = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z}$ Soit l'application:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$$

Exprimer X en coordonnées cylindriques, c à d calculer f_*X

7. On considère l'injection du cylindre unitaire d'axe oz , dans \mathbb{R}^3 donnée par:

$$f(\theta, z) = (x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = z) \text{ où } \theta \in]0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}$$

et soit $g_0 = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ la métrique canonique sur \mathbb{R}^3 . Donner la métrique g associée à g_0 induite par f sur S^2

8. Soit l'ouvert U de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et la 1-forme différentielle $\omega(x, y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ définie sur U . On définit sur l'ensemble $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\}$ l'application inversible φ à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \leq 0\}$ par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Calculer $\varphi^*\omega$

9. On suppose que

$$\alpha = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy \\ \beta = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \\ Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

Calculer $\alpha \wedge \beta$ et $(\alpha \wedge \beta)(X, Y)$

10. Soient a_{ij}, b_{ij} les composantes d'un tenseur $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si $a_{ij}x^i x^j = b_{ij}x^i x^j$ pour des valeurs arbitraires x^i .
Montrer que

(a) $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$

(b) Si $a_{i j} = a_{j i}$ et $b_{i j} = b_{j i}$ alors $a_{i j} = b_{i j}$

11. Soient $a^{i j}$ les composantes d'un tenseur symétrique $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b_{i j}$ les composantes d'un tenseur anisymétrique $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $a^{i j} b_{i j}$ avec $i, j = 1, 2$.

12. Soient $a_{i j}, b_{i j}$ les composantes de deux tenseurs symétriques $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tels que

$$a_{i j} b_{k l} - a_{i l} b_{j k} + a_{j k} b_{i l} - a_{k l} b_{i j} = 0$$

Montrer que $a_{i j} = \lambda b_{i j}$ pour un certain réel λ .

13. Soient a_j^i les composantes d'un tenseur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que:

(a) si a_j^i vérifie $a_k^i a_j^k = \delta_j^i$ alors $\det(a_j^i) = \pm 1$

(b) si $\det(a_j^i) = -1$ alors $\det(a_j^i + \delta_j^i) = 0$

(c) si $\det(a_j^i) = 1$ et (a_j^i) est d'ordre impair alors $\det(a_j^i - \delta_j^i) = 0$

14. Soient $a_{i j}$ et b_i les composantes d'un tenseur symétrique $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d'un tenseur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement. On suppose que ces composantes vérifient

$$a_{i j} b_k + a_{j k} b_i + a_{k i} b_j = 0; \quad i, j, k = 1 \cdots n$$

Montrer que l'on a $a_{i j} = 0$ pour tous i et j ou bien $b_i = 0$ pour tout i .

15. Soit V un e.v. de dimension n et $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de V . Soit $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la base duale et soit $\alpha \in \otimes_2^0 V$. Montrer que:

(a)
$$\alpha = \sum_{i, j=1}^n \alpha(e_i, e_j) \omega^i \otimes \omega^j$$

(b) Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une autre base de V telle que $\alpha(e_i, e_j) = \alpha_{i j}$, $\alpha(u_i, u_j) = b_{i j}$, $u_j = c_j^i e_i$. Exprimer $b_{i j}$ en fonction de $\alpha_{k l}$.

16. Soit V un e.v de dimension n , $\omega_1, \dots, \omega_n$ sont des 1-formes sur V . Montrer que $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est libre si et seulement si

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \neq 0$$

17. Soit V un e.v de dimension finie. Un élément $\theta \in \wedge^k V$ est dit homogène de degré k si $\theta \in \wedge^k V$, et un élément homogène de degré $k \geq 1$ est dit décomposable si et seulement s'il existe k éléments $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^k$ de $\wedge^1 V$ tels que $\theta = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k$.

(a) Calculer $\theta \wedge \theta$ lorsque $\theta \in \wedge^k V$ est décomposable

(b) Si $\dim V > 3$ et $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ sont linéairement indépendants, la 2-forme $\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4$ est-elle décomposable?

- (c) Montrer que si $\dim V \leq 3$ alors tout élément homogène de degré $k \geq 1$ est décomposable.
 (d) Si $\dim V = 4$, donne un exemple d'un élément homogène non décomposable. (Prends un élément de $\wedge^2 V$)
-

18. Soit A un tenseur $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur un e.v V qui vérifie:

$$\begin{cases} A_{i j k l} = -A_{j i k l} \\ A_{i j k l} = -A_{i j l k} \end{cases}$$

Soit $S_{i j k l} = A_{i j k l} + A_{i k l j} + A_{i l j k} = 0$. Montrer que

- (a) $A_{i j k l} = A_{k l i j}$
 (b) Si $A(v, \omega, v, \omega) = 0$ pour tous $v, \omega \in V$ alors $A = 0$.
-

19. Pour toute fonction réelle de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

le gradient de f est un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 donné en coordonnées cartésiennes par

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$$

Soit

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) & \longrightarrow & (x = u^2 + v^2 + w, y = -u^2 + 2w, z = -u^2 + v^2 - w) \end{array}$$

- (a) Montrer que g représente un changement de variable local. La fonction g est-elle un changement de variable global?
 (b) Montrer que les coordonnées curvilignes (u, v, w) sont orthogonales et donner la matrice associée à la métrique h dans les système de coordonnées (u, v, w)
 (c) Exprimer ∇f dans les coordonnées (u, v, w)
-