

1. Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien. Vérifier que deux vecteurs  $u, v$  de  $E$  sont orthogonaux si et seulement si  $\|u + v\| = \|u - v\|$

2. Vérifier que les objets mathématiques suivants définissent de produits scalaires:

(a) Sur  $\mathbb{R}^3$  :  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$

(b) Sur  $M_2(\mathbb{R})$  :  $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A.B)$

(c) Sur  $\mathbb{R}[x]$  :  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$

- (a) Soit  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer qu'il existe une unique application bilinéaire, alternée  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que:

$$f(e_1, e_2) = e_3, f(e_2, e_3) = e_1, f(e_3, e_1) = e_2$$

- (b) Calculer  $f(x, y)$  en fonction des composantes de  $x$  et  $y$  dans la base canonique. ( $f(x, y)$  est dite le produit vectoriel de  $x$  par  $y$  et est noté par  $x \wedge y$ )

- (c) Montrer que

$$\langle x \wedge y, z \rangle = \det \|x, y, z\|_{e_i} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$$

- (d) Montrer que

$$\|x \wedge y\| = A(x, y)$$

où  $A(x, y)$  est l'aire du parallélogramme défini par  $x$  et  $y$  :

$$A(x, y) = \|x\| \|y\| |\sin \theta|$$

En déduire que

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$$

3. Déterminer une base orthonormée du sous - espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

( $\mathbb{R}^4$  étant muni du produit scalaire canonique)

- (a) Montrer que tout endomorphisme orthogonal sur un espace euclidien est bijectif

- (b) Vérifier que la matrice suivante

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est orthonormale

- (c) Déduire que  $A$  est une rotation et trouver son axe de rotation ainsi que l'angle de rotation (non orienté) correspondant

(d) Déterminer l'angle de rotation orienté

---

(a) Comment peut-on définir l'angle entre deux plans de  $\mathbb{R}^3$

Exemple: Calculer l'angle entre les plans  $\pi : 2x + y - 3z = 0$  et  $\pi' : x - 3y + 2z = 0$

(b) Déterminer la matrice qui représente dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  la projection orthogonale sur le plan  $\pi$  d'équation:  $x + 2y - 3z = 0$

En déduire la matrice qui représente la symétrie orthogonale par rapport à  $\pi$

---

4. Montrer que toute matrice  $A \in O(2, \mathbb{R})$  peut s'écrire sous la forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & (-1)^{k+1} \sin\theta \\ \sin\theta & (-1)^k \cos\theta \end{pmatrix}$$

En déduire la forme des éléments de  $SO(2, \mathbb{R})$ .

---

(a) Montrer que l'application:

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par:  $\langle x, y \rangle = (\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - x_2 + x_3)(\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - y_2 + y_3) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + 3x_3y_3$

est un produit scalaire

(b) Déterminer l'angle (non orienté) entre les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  étant muni du produit scalaire défini dans la partie a

---

5. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme qui dans la base caractéristique de  $\mathbb{R}^3$  est représenté par  $A$ .

---

6. Pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  les formes bilinéaires sur  $\mathbb{R}^3$  ci - dessous définissent - elles un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$

(a)  $f(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$

(b)  $f(x, y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + \lambda x_3y_3 + 6x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$