

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme qui, dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Trouver le spectre réel et le spectre complexe de f

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme qui, dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que f est diagonalisable
 - (b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f
 - (c) Trouver une matrice diagonale semblable à A
 - (d) Déduire la matrice de passage P de la canonique $B = \{e_1, e_2\}$ à la base propre $B' = \{v_1, v_2\}$
 - (e) Soit $u = 2e_1 - 3e_2$. Trouver les composantes de u dans B' .
-

3. Trouver les espaces propres associés à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

en déduire que A est diagonalisable.

4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Montre que \mathbb{R}^3 peut s'écrire comme $E \oplus F$ où E et F sont deux espaces propres de A de dimensions respectives $\dim E = 2$, $\dim F = 1$.
 - (b) En déduire que A est diagonalisable. Trouver la matrice de passage entre la base canonique et une base propre qu'on déterminera.
-

5. Vérifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans \mathbb{C} mais pas dans \mathbb{R} . Trouver alors la matrice diagonale complexe semblable à A .

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- (a) Trouver la matrice diagonale semblable à A en déduire A^k , $k \geq 1$.
 (b) On donne les suites numérique

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Montrer que $X_n = A^n X_0$ où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n

7. Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans lui même représentée dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix} \quad m \in \mathbb{R}$$

- (a) Déterminer m pour que f soit bijective
 (b) On pose $m = 4$
1. Calculer A^{-1}
 2. Quel est l'antécédent du vecteur e_3 par f
 3. Calculer les valeurs propres de f
 4. Quelles valeurs faut-il donner à α et β pour que la famille $B = \{a, b, c\}$, où $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, \alpha, -2)$, $c = (1, \beta, 0)$ soit une base formée de vecteurs propres de f ?
 5. Vérifier que A est diagonalisable et trouver la matrice diagonale qui lui est semblable
 6. Calculer A^n où $n \in \mathbb{N}^*$.
-

8. Soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$$

Diagonaliser la matrice du système et en déduire sa solution.
