

1. (a) Déterminer la matrice qui représente dans la base canonique de \mathbb{R}^3 la projection f sur le plan π d'équation $x + 2y + 3z = 0$ parallèlement à la droite D d'équation $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z$
- (b) Ecrire la matrice A' de f dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ où $\{v_1, v_2\}$ est une base de π et v_3 est une base de D . En déduire la matrice de f trouvée dans la partie a.

2. Dans \mathbb{R}^n On appelle longueur du vecteur $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ le scalaire

$$\|v\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

Montrer que les rotations de centre O dans le plan \mathbb{R}^2 conservent la longueur des vecteurs, la rotation étant définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

3. Soit A une matrice carrée d'ordre n On appelle trace de A

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

- (a) Montrer que l'application

$$tr : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme linéaire

- (b) Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace
- (c) Montrer que l'on ne peut pas trouver de matrices A, B dans $M_n(C)$ telles que

$$AB - BA = I$$

4. Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ P &\longrightarrow (ax + 1)P + (bx^2 + c)P' \end{aligned}$$

Quelles relations doivent vérifier a, b et c pour que f soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$? Déterminer dans ce cas le rang de f

5. Soit l'homomorphisme d'e.v.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longrightarrow (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t) \end{aligned}$$

Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$

6. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application associée à M définie par

$$f : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ A & \longrightarrow & AM - MA \end{array}$$

- (a) Vérifier que f est un endomorphisme d'e.v.
 - (b) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$
-

7. Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longrightarrow & (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{array}$$

Montrer que φ est un isomorphisme d'e.v.

8. Soit E un e.v. On appelle projecteur un endomorphisme P de E tel que $P^2 = P$. Montrer que si P est un projecteur alors $E = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$

9. Soit f une application linéaire bijective de E dans F (c'est -à-dire un isomorphisme). Montrer que f^{-1} est une application linéaire

10. Soit $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$.

- (a) Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$
 - (b) En déduire qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ et $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = g(x).v$
(Ind. Utiliser le théorème de la dimension pour montrer que $\text{rg } f \leq 1$)
-

11. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 qui dans la base canonique est représentée par la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\text{ker } f$, une base de $\text{Im } f$ et l'équation de $\text{Im } f$
