

1. On se met dans l'e.v. \mathbb{R}^3 muni des lois habituelles. Soit:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & & = & 0 \end{cases}\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)^2 = 2x + y\}$$

- (a) Vérifier que F est un s.e.v de \mathbb{R}^3 alors que G ne l'est pas
 (b) Trouver une base de F et en déduire sa dimension
 (c) Quelle est l'interprétation géométrique de F

2. On se met dans $M_2(\mathbb{R})$ muni des lois habituelles. On considère les sous ensembles:

$$E = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}\}$$

$$F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\}$$

- (a) Vérifier que F est un s.e.v de \mathbb{R}^3 alors que G ne l'est pas
 (b) Trouver une base de F et en déduire sa dimension

3. Montrer que $\{v_1, v_2\}$ où $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-1, 1)$ engendrent \mathbb{R}^2 . Est-elle une base?

4. La famille $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ où $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (0, -1, 5)$ est-elle libre? Est-elle génératrice? Quelle relation linéaire lie ces vecteurs? Quel est l'espace qu'ils engendrent?

5. (a) Le corps \mathbb{k} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Montrer que $E = \{A \in M_n(\mathbb{k}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ est un s.e.v. de $M_n(\mathbb{k})$. En donner une base pour $n = 2$
 (b) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)x + \mu x^2 \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[x]$. En donner une base

6. On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 . Soit

$$E = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(-1) = 0\} \text{ et } F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1-x) = P(x)\}$$

- (a) Montrer que E et F sont deux s.e.v de $\mathbb{R}_2[x]$. En donner une base de chacun d'eux et déduire leurs dimensions
 (b) E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[x]$?

7. On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = I_2$. On définit l'ensemble

$$E = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

- (a) Montrer que E est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$

- (b) Montrer que $\{A, I\}$ est un système de générateurs de E , en déduire la dimension de E
(c) Résoudre dans E l'équation: $X - A^2X + AXA - A = 0$.
-

8.

$$\begin{aligned}x_1 &= (1; 1; 0; -1), & x_2 &= (1; 2; 3; 0), & x_3 &= (2; 3; 3; -1), \\x_4 &= (1; 2; 2; -2), & x_5 &= (2; 3; 2; -3), & x_6 &= (1; 3; 4; -3)\end{aligned}$$

Trouver les dimensions de $U + V$ et de $U \cap V$ dans les cas suivants:

- (a) $U = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ et $V = \langle x_4, x_5, x_6 \rangle$
(b) $U = \langle x_1, x_2 \rangle$ et $V = \langle x_1, x_3, x_4 \rangle$