Ex1

1) $(a,b,c) \in \ker f \iff f(a,b,c)=0 \iff (a+b)x^2+(b+c)x+(c-a)=0$

donc $a+b=0$; $b+c=0$; $c-a=0$.

$a=c=-b$ et $(a,b,c)=(a,-a,a)=a(1,-1,1)$

$\ker f = \langle (1,-1,1)\rangle$; $\{v\}$, $v=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, est une base de $\ker f$.

$\ker f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective. Comme $d\,\mathbb{R}^3 =$ $\dim \mathbb{R}_2[x]=3$, alors f n'est pas surjective et bien sûr elle n'est pas inversible.

2) $\{e_1,e_2,e_3\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$; $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}=\mathcal{B}$ engendre $\mathrm{Im} f$; $d\,\mathrm{Im} f = d\,\mathbb{R}^3 - d\ker f = 2$

donc 2 vecteurs parmi les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont indépendants.

$f(e_1)=x^2-1$; $f(e_2)=x^2+x$; $f(e_3)=x+1$

$f(e_3)=f(e_2)-f(e_1)$ et $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre

par suite $\{u_1=x^2-1,\ u_2=x^2+x\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

3) $$A=\begin{array}{c l}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix}\to 1\\ \to x\\ \to x^2\end{matrix}\end{array}$$

4) Soit $e'_1=x^2-1$; $f(e_1)=f(1,0,0)=e'_1$

$e'_2=2x^2+2x$; $e'_3=x$

$f(e_2)=x^2+x=\frac{1}{2}e'_2$ et $f(e_3)=x+1=\frac{1}{2}e'_2-e'_1$

D'où

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to e'_1 \\ \to e'_2 \\ \to e'_3 \end{array}$$

5) a) $A' = M(f, B')$; $|A'| = 0$ donc A' n'est pas inversible et par suite f n'est pas inversible

b) $X = f(u) = f(-1, 2, 1) = x^2 + 3x + 2$

$$A'u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = -2e'_1 + \frac{3}{2} e'_2$$

<u>vérificat°</u> : $-2e'_1 + \frac{3}{2} e'_2 = -2x^2 + 2 + 3x^2 + 3x$

$= x^2 + 3x + 2.$

<u>Ex2</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\frac{dX}{dt} = AX$; $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \lambda^2(\lambda - 6)$$

$\lambda_1 = 0$ est une v.p. double et $\lambda_2 = 6$ est une v.p simple

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un $\overrightarrow{v.p}$ associé à λ_1

$(A - \lambda I)X = AX = 0$: donne :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1 \end{array}$$

$rg(A)=1$; $x = -2y + z$

$$X = \begin{pmatrix} -2y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y v_1 + z v_2$$

$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont 2 $\vec{v.p}$ associés à $\lambda_1 = 0$

Soit X un $\vec{v.p}$ associé à $\lambda_2 = 6$

$(A - 6I)X = 0$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 5\ell_2 + 2\ell_1 \\ 5\ell_3 - \ell_1 \end{array}$$

$y = -2z$; $-5x = z + 4z = 5z$ et $x = -z$

$X = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un $\vec{v.p}$

associé à λ_2. $\dim E_{\lambda_i} = mult(\lambda_i)$ $i = 1, 2$

donc A est diagonalisable et $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base

propre. $Y_1 = e^{\lambda_1 t} v_1 = v_1$; $Y_2 = e^{\lambda_1 t} v_2 = v_2$; $Y_3 = e^{\lambda_2 t} v_3$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad Y_3 = \begin{pmatrix} e^{6t} \\ 2e^{6t} \\ -e^{6t} \end{pmatrix}$$

la S.G. du système diff est

$$X = \begin{pmatrix} -2c_1 + c_2 + c_3 e^{6t} \\ c_1 + 2c_3 e^{6t} \\ c_2 - c_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

b) A étant diagonalisable, elle est semblable

à

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \; ; \; A' = P^{-1} A P \text{ avec}$$

$$P = P_{e_i \to v_i} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = P A'^n P^{-1} \; ; \; |P| = -2(-2) - (-2) = 6$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} {}^t\mathrm{cof}(P) = \frac{1}{6} {}^t\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & +2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A'^n P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6^{n-1} & 2\cdot 6^{n-1} & -6^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6^{n-1} & 2\cdot 6^{n-1} & -6^{n-1} \end{pmatrix} = 6^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = 6^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 6^{n-1} \cdot A.$$

Ex 4

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$(r, \theta) \longrightarrow (x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta)$

un changement de coordonnés locals.

$U =]0, 2\pi[\times]0, +\infty[$; $f_* : \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$

$$f_* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

X s'écrit en coordonnées polaires comme

$$X' = a(r,\theta)\frac{\partial}{\partial r} + b(r,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

il faut trouver $a(r,\theta)$, $b(r,\theta)$ de sorte que

$f_* X' = X$ c.a.d

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$f_*^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit $X = \dfrac{\partial}{\partial \theta}$.

2) $\gamma :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est une courbe intégrale
$t \longrightarrow (x(t), y(t))$

de X si $\begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dt}(t) = X_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = (x,y) \end{cases}$

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \textcircled{2}\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

donc $\dfrac{dy}{dt} = -x''(t)$ d'après ①

et par ② : $x'' + x = 0$ soit $\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = i$ est une racine

$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$

$y(t) = -x'(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$

$\gamma(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t,\ c_1 \sin t - c_2 \cos t)$ tq $\gamma(0) = (x,y)$

Soit $c_1 = x$, $c_2 = -y$

$\gamma_{(x,y)}(t) = (x \cos t - y \sin t,\ x \sin t + y \cos t)$

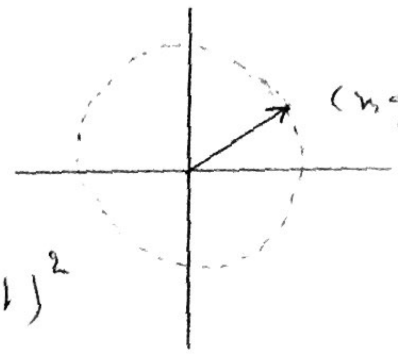
c'est à dire l'orbite de X qui passe par (x,y) est

$$\gamma_{(x,y)}(t) = (x \cos t - y \sin t,\ x \sin t + y \cos t)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(c'est donc une rotation du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'angle t et comme t est libre cela va donner un cercle)

ce qui justifie le calcul de:

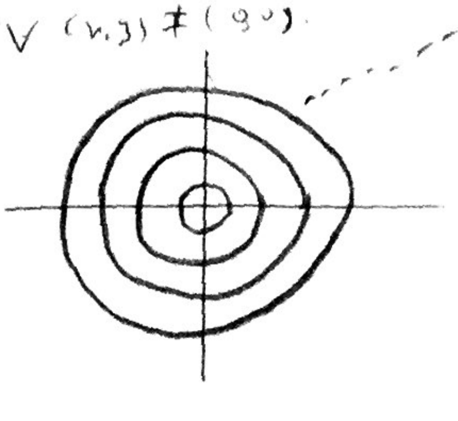


$$X^2_{\gamma(t)} + Y^2_{\gamma(t)} =$$

$$(x \cos t - y \sin t)^2 + (x \sin t + y \cos t)^2$$

$$= x^2 + y^2$$

Une orbite de X passant par (x,y) est donc un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$.



EX5

1) $|i'_*|_{(u,v,w)} = -24uv \neq 0 \ \forall u \neq 0$ et $v \neq 0$.

i est un changement de variable local défini sur $\mathbb{R}^3$ sauf les plans $u=0$ et $v=0$.

2) $$(\mathcal{X}(\mathbb{R}^3 - \{v0w, u0w\}), h) \xrightarrow{i'_*} (\mathcal{X}(\mathbb{R}^3), g).$$

a) $$i'_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \begin{pmatrix} 2u & 2v & 1 \\ -2u & 0 & 2 \\ -2u & 2v & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2u\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

de m. $i'_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = \left(\quad \right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}$

$$= 2v\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

et $i'_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right) = \left(\quad \right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}$

b) $h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$

$$= g\left(i'_* \frac{\partial}{\partial u}, i'_* \frac{\partial}{\partial u}\right) = 12u^2$$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = 0$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = 0.$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = 8v^2$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle = 0$ et $\left\langle \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle = 6$

D'où $h = \begin{pmatrix} 12u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

c) les coordonnées (u, v, w) sont orthogonales car

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle = 0.$$

3) par comparaison avec le rappel ci-dessous

$q_1 = u$, $q_2 = v$, $q_3 = w$; $h_1 = 2u\sqrt{3}$, $h_2 = 2v\sqrt{2}$

$h_3 = \sqrt{6}$.

$$\nabla f = \frac{1}{2u\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial u} e_1 + \frac{1}{2v\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial v} e_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\partial f}{\partial w} e_3$$

$e_1 = \dfrac{\frac{\partial}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial}{\partial u} \right\|}$ où $\left\| \frac{\partial}{\partial u} \right\|^2 = 12u^2$; $e_1 = \dfrac{1}{2u\sqrt{3}} \dfrac{\partial}{\partial u}$

$e_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}v} \dfrac{\partial}{\partial v}$; $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \dfrac{\partial}{\partial w}$

$$\nabla f = \frac{1}{12u^2} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{8v^2} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial}{\partial w}.$$

Voir ex 3 page 9. →

Ex3

1) $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-0&0\end{pmatrix}\in U$ et $U\neq\emptyset$

Si $A,B\in U$ alors $A=\begin{pmatrix}a&c\\-c&b\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}a'&c'\\-c'&b'\end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix}a+a'&c+c'\\-(c+c')&b+b'\end{pmatrix}$ de la forme $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\gamma\end{pmatrix}\in U$

Si $\lambda\in\mathbb{R}$, $A\in U$ on a $\lambda.A=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda c\\-(\lambda c)&\lambda b\end{pmatrix}\in U$

par suite U est un s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$.

<u>base de U</u> : $A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&c\end{pmatrix}\in U$,

$A=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=au+bv+cw$

donc $\{u,v,w\}$ engendre U.

Si $au+bv+cw=0$ alors $\begin{pmatrix}a&b\\-b&c\end{pmatrix}=0$ et

donc $a=b=c=0$ et $\{u,v,w\}$ est libre, par suite

c'est une base de U ; $\dim U=3$.

2) Si $aM_1+bM_2=0$ alors $\begin{pmatrix}a&2b\\b&-a\end{pmatrix}=0$

et donc $a=b=0$; $\{M_1,M_2\}$ est libre par suite

c'est une base de V ; $\dim V=2$.

3) $A\in U+V$ donc $A=X+Y$ avec $X\in U$, $Y\in V$

$A=au+bv+cw+dM_1+eM_2$

(10)

$\{u, v, w, M_1, M_2\}$ engendre $U+V$. Sachant que $U+V \subset M_2(\mathbb{R})$ donc $\dim(U+V) \leq 4$. on cherche parmi u, v, w, M_1, M_2 les vecteurs qui sont l.i entre eux. Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ on propose d'echelonner les vecteurs $\{u, v, w, M_1, M_2\}$ selon cette base

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_5 - 2\ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 - \ell_1 \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \ell_5 + \ell_4 \end{array}$$

on a $\{u, v, w, M_1\}$ est libre ; $\dim U+V = 4$ et donc $U+V = M_2(\mathbb{R})$.