Barème suite n° 3

c) e_r : 2 pts ; e_θ 3 pts ; e_z 3 pts

d) l_{ii} : 2 + 2 + 2 = 6 pts ; $l_{ij} = 0$ $i \neq j$ 1 pt

e) 3 pts f) 2 pts

Barème

Ex1 1) 2 pt ; 2) Ecriture du système 1 p

Résolut° du système 2 pts ; base et dim de Ker f 1 pt

Interprétat° 1 pt ; dim Im f 1 pt ; base de Im f

2 pts ; Interprétat° 1 pt. 3) inj : 1 pt ; surj : 1 pt

4) $|A| = 0$ 1 pt ; 5) $P_A(\lambda)$: 2 pts ; v.p : 2 pts ;

$\overrightarrow{v.p}$ 2 + 2 = 4 pts 6) 2 pts 7) 2 pts

8) : $|P|$: 1 pt ; P^{-1} : 3 pts ; X : 2 pts 9) v_3 : 3 pts

x_1, x_2, x_3 : 3 pts ; S.G. 2 pts

Ex2 1) 2 pts 2) 3 pts ; 3) $y =$ 2 pts

$x =$ 2 pts ; condit° initiale 2 pts ; $C(t) =$ 1 pt

Interprétat° : 3 pts.

Ex3 1) bilin 1 pt ; sym 1 pt : D. P. 4 pts 2) 3 pts

3) 1 pt 4) a) f_* : 3 pts ; $\left(f_* \frac{\partial}{\partial r}, f_* \frac{\partial}{\partial \theta}, f_* \frac{\partial}{\partial y}\right)$: 3 pts

b) $\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle$: $6 \times 1 =$ 6 pts, $h =$ 2 pts

forme tensorielle 1 pt ; n'est pas orthogonale 2 pts

⑥

$= 2r\cos\theta\, e'_r - r\sin\theta\, e'_\theta$

$+ (2z - 2r\cos^2\theta - r\sin^2\theta)\, e'_z$

$e'_r = \frac{e_r}{\|e_r\|}$; $e'_\theta = \frac{e_\theta}{\|e_\theta\|}$; $e'_z = \frac{e_z}{\|e_z\|}$

$\{e'_r, e'_\theta, e'_z\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$.

f) $e_r \otimes e_z =$

$\frac{\partial}{\partial r} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial z} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$

$= \frac{\partial}{\partial r} \otimes \frac{\partial}{\partial z} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \otimes \frac{\partial}{\partial r}$

$+ \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \otimes \frac{\partial}{\partial \theta}$

$e_r \otimes e_z (dr, dr) = -\cos\theta$.

$e_r \otimes e_z (dr, d\theta) = \frac{1}{r}\sin\theta$.

$e_r \otimes e_z (dr, dz) = 1$

⋮

$$e_r \otimes e_z = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \frac{1}{r}\sin\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rq

$X \otimes Y (\alpha, \beta) = X(\alpha) . X(\beta)$

$= \alpha(X) . \alpha(\beta)$

$X, Y \in \mathcal{X}(U)$; $\alpha, \beta \in \Lambda^1 U = U^*$.

3)
$$g = dx\otimes dx + dx\otimes dz + dy\otimes dy + dz\otimes dx + 3\,dz\otimes dz$$

4) a) $$f_* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \mathrm{Mat}(f_*)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta \\ 0\end{pmatrix}$$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \mathrm{Mat}(f_*)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta \\ 0\end{pmatrix}$$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \mathrm{Mat}(f_*)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_*\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y} \\ f_*\frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y} \\ f_*\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

b)
$$h\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right) = g\left(f_*\frac{\partial}{\partial r}, f_*\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$= (\cos\theta, \sin\theta, 0)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$h\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\0\end{pmatrix}$$
$$= 0$$

$$h\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial z}\right) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \cos\theta$$

$$h\left(\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\ -r\sin\theta\end{pmatrix}$$

(5

$$= r^2 \;;\; h\left(\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial z}\right) = -r\sin\theta$$

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\right) = (0,0,1)\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = 3$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\theta \\ 0 & r^2 & -r\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 3 \end{pmatrix}$$

$$h = dr\otimes dr + \cos\theta\, dr\otimes dz + r^2 d\theta\otimes d\theta - r\sin\theta\, d\theta\otimes dz + \cos\theta\, dz\otimes dr - r\sin\theta\, dz\otimes d\theta + 3\,dz\otimes dz$$

$h_{ij} \neq 0$ pr $i \neq j$. donc

$\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ n'est pas une base orthogonale de $x(U)$.

c) $$\varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r} \;;\; \varepsilon_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda\frac{\partial}{\partial r}$$

où $$\lambda = -\frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle}{\left\|\frac{\partial}{\partial r}\right\|^2} = -\frac{h_{12}}{h_{11}}$$

$$\lambda = 0 \text{ et } \varepsilon_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z} + \lambda\frac{\partial}{\partial r} + \mu\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\lambda = -\frac{h_{31}}{h_{11}} = -\cos\theta$$

$$\mu = -\frac{h_{32}}{h_{22}} = \frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}$$

en tout point (x,y) on a

$c_1 = \frac{x+y}{2}$; $c_2 = \frac{y-x}{2}$

les composantes de la courbe $c(t)$ sont :

$$\begin{cases} X = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \\ Y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \end{cases}$$

$X + Y = 2 c_2 e^{t}$

$Y - X = 2 c_1 e^{-t} = \frac{4 c_1 c_2}{X+Y}$

$Y^2 - X^2 = 4 c_1 c_2$

en tout point tq $c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$

c.à.d en tout point (x,y) qui n'est pas sur la 1ère bissectrice ni sur la 2ème bissectrice, la courbe intégrale de X est une hyperbole

$Y^2 - X^2 = (y^2 - x^2)$

sur la 1ère ou la 2ème bissectrice la courbe intégrale est $Y = X$ ou $Y = -X$.

Ex3

1) 1ère méthode

g est bilinéaire car g est définie par une matrice.

la matrice g est symétrique $^tg = g$ donc $g(X,Y) = g(Y,X)$

les v.p. de g sont

$2+\sqrt{2} > 0$, $2-\sqrt{2} > 0$ et $1 > 0$

donc g est définie positive

2ème méthode :

$g(X,Y) = {}^tX g Y$

$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 + y_3 \\ y_2 \\ y_1 + 3y_3 \end{pmatrix}$

$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3 x_3 y_3 + x_1 y_3 + x_3 y_1$

$= \sum a_{ij} x_i y_j$ avec $a_{ij} = a_{ji}$

donc g est symétrique

g est visiblement bilinéaire

$g(X,X) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz$

$= (x+z)^2 + y^2 + 2z^2 > 0$

$\forall X \neq 0$.

D'où g est définie positive

par suite g est un produit scalaire

2°) voir 2ème méthode

g) on a

$v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ un v.p de A

associé à $\lambda_1 = 0$

$v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ un v.p de A associé

à $\lambda_2 = 1$

Soit v_3 tq $(A - \lambda_2 I)v_3 = v_2$

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ -x - 3y + 2z = 1 \\ -x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -z+2 \\ z-1 \\ z \end{pmatrix}$$

p: $z = 0$; on prend $v_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$X_1 = v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$X_2 = v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix}-e^t\\e^t\\e^t\end{pmatrix}$$

$$X_3 = (v_2 t + v_3)e^{\lambda_2 t}$$

$$= \left[\begin{pmatrix}-t\\t\\t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right]e^t$$

$$X_3 = \begin{pmatrix}(-t+2)e^t\\(t-1)e^t\\te^t\end{pmatrix}$$

$\{X_1, X_2, X_3\}$ sont des solut:

du système $\frac{dX}{dt} = AX$

qui sont l.i et la S.G

est

$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$; $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$X = \begin{pmatrix} -c_2 e^t + c_3(-t+2)e^t \\ c_1 + c_2 e^t + c_3(t-1)e^t \\ c_1 + c_2 e^t + c_3 t e^t \end{pmatrix}.$$

Ex 2 : $c(t) = (x(t), y(t))$ tq

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y$$

$$y'' - y = 0$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

$$x = \frac{dy}{dt} = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

$c(0) = (x, y)$ donc

$(-c_1 + c_2,\ c_1 + c_2) = (x, y)$.

$c_1 = \frac{x+y}{2}$; $c_2 = \frac{y-x}{2}$

$$c(t) = \left(-\frac{x+y}{2}e^{-t} + \frac{y-x}{2}e^t,\right.$$

$$\left.\frac{x+y}{2}e^{-t} + \frac{y-x}{2}e^t\right).$$

(2)

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -x - 3y + 2z = 0 \\ -x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -y = -z \end{cases} ; \quad X = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un v.p associé à $\lambda_2 = 1$

$E_{\lambda_1} = E_0 = \langle v_1 \rangle$; $E_{\lambda_2} = E_1 = \langle v_2 \rangle$

$\dim E_0 = 1$; $\dim E_1 = 1$.

6) $\dim E_1 = 1 \neq \mathrm{mult}(\lambda_2 = 1) = 2$ donc A n'est pas diagonalisable.

7) $B = \left\{ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

$$P = P_{B_0 \to B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

8) $$|P| \underset{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 ; \quad P^{-1} = \frac{1}{|P|}\, {}^t\mathrm{Com}(P)$$

$$P^{-1} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6u + 2v + 3w$$

Ex1

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

2) $X \in \ker f \Rightarrow f(X) = 0$.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x - 2y + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ l_2 + l_1 \\ l_3 + l_1 \end{array}$$

$y = z$; $x = 0$

$X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y \cdot v$

$\{v\}$ est une base de $\ker f$

$\dim \ker f = 1$

$\ker f$ n'est autre que la droite dans l'espace passant par O et de vecteur directeur v.

$\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$

$\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ engendre $\operatorname{Im} f$

$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

engendre $\operatorname{Im} f$

$\{v_1, v_2\}$ est libre car $rg(v_1, v_2) = 2$

donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$, c'est un plan passant par O et porté par les vecteurs v_1 et v_2

3) $\ker f \neq \{0\} \Rightarrow f$ n'est pas injective

$\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ n'est pas surjective

4) f n'est pas inversible donc A n'est pas inversible et $|A| = 0$

5) $P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda$$

$P_A(\lambda) = 0$ si $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_1 = 0$ v.p. simple

$\lambda_2 = 1$ v.p double

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un $\overrightarrow{v.p}$ associé à $\lambda_1 = 0$

$(A - \lambda_1 I)X = 0 \Leftrightarrow AX = 0$.

$X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

un $\overrightarrow{v.p}$ associé à $\lambda_1 = 0$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un $\overrightarrow{v.p}$ associé à $\lambda_2 = 1$. on a $(A - I)X = 0$.