

Mathématiques Appliquées (LBC101)
Rattrapage 2018-2019 ⌚ 3h :00

Centre de : Beyrouth



Documents Autorisés : Calculatrice non programmable



En Annexe un formulaire regroupant les algorithmes et les principaux résultats

Examen proposé par : J.SAAB au centre de Beyrouth et les antennes régionales

Exercice 1 (20 points) Soit f la fonction linéaire donnée par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ (a, b, c) &\longmapsto (a+b)x^2 + (b+c)x + (c-a) \end{aligned}$$

1. Donner une base de $\text{Ker } f$ et déduire si f est injective ? surjective ? inversible ?
2. Donner une base de $\text{Im } f$.
3. Donner la matrice A qui représente f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et $\mathbb{R}_2[x]$.
4. Soit $B' = \{x^2 - 1, 2x^2 + 2x, x\}$ une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Montrer que la matrice A' qui représente f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 et la base B' de $\mathbb{R}_2[x]$ est donnée par

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Utiliser A' pour :
 - (a) remonter si f est inversible.
 - (b) trouver les composantes de $f(u)$ sur la base B' , où $u = (-1, 2, 1)$

Exercice 2 (20 points) On considère le système différentiel linéaire homogène donné par

$$\frac{dX}{dt} = AX \text{ où } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}; \text{ soit}$$

$$(S) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = -x - 2y + z \end{cases}$$

1. Trouver la solution générale de (S).
2. Justifier que la matrice du système A est diagonalisable. Donner A' , la matrice diagonale semblable à A ainsi que la matrice de passage P de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base propre associée à A . Déduire A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (15 points) On considère dans $M_2(\mathbb{R})$, muni des lois $+$ et \cdot , le sous-ensemble U suivant :

$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) / A = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que U est un s.e.v de $M_2(\mathbb{R})$, en donner une base et la dimension
2. On considère le s.e.v V , engendré par

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\{M_1, M_2\}$ est une base de V

3. Donner une base et la dimension du s.e.v $U + V := \{u + v / u \in U \text{ et } v \in V\}$

Exercice 4 (15 points) : Soit $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

1. Ecrire le champ X en coordonnées polaires

$$X = a(r, \theta) \frac{\partial}{\partial r} + b(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

2. Déterminer les courbes intégrales de X et vérifier qu'elles sont des cercles concentriques de centre O .

Exercice 5 (30 points) Pour toute fonction réelle de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

le gradient de f est un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 donné en coordonnées cartésiennes par

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$$

Soit

$$i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) \longrightarrow (x = u^2 + v^2 + w, y = -u^2 + 2w, z = -u^2 + v^2 - w)$$

1. Montrer que i représente un changement de variable local. La fonction i est-elle un changement de variable global ?
2. Soit $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ la métrique canonique de \mathbb{R}^3 muni des coordonnées (x, y, z) et soit $h = i^*g$ la métrique induite de g par i sur \mathbb{R}^3 muni des coordonnées (u, v, w) .

$$h(X, Y) := g(i_*X, i_*Y)$$

où i_* est l'application tangente associée à i .

(a) Donner les vecteurs : $i_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$, $i_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)$, $i_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)$

(b) Donner la matrice représentative de h

$$h = \begin{pmatrix} h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) & h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) & h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial w}\right) \\ h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right) & h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) & h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}\right) \\ h\left(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial u}\right) & h\left(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial v}\right) & h\left(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w}\right) \end{pmatrix}$$

(c) En déduire que les coordonnées curvilignes (u, v, w) sont orthogonales.

3. Exprimer $(\nabla f)_{(u,v,w)}$ dans les coordonnées (u, v, w) en fonction des dérivées premières de $t(u, v, w) = (f \circ i)(u, v, w) = f(i(u, v, w))$



Formulaires



Rappel 1 :

1. l'endomorphisme f est injectif si $\ker f = \{0\}$ et elle est surjectif si $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$
2. La matrice de f est inversible si f est injectif et surjectif
3. Si $X = (x_i)_B = (x'_i)_{B'}$ où B et B' sont deux bases et $P = P_{B \rightarrow B'}$ alors $(x'_i) = P^{-1} \cdot (x_i)$
4. Système différentiel $(S) : \frac{dX(t)}{dt} = AX :$
 - (a) Si A est diagonalisable on a $\{V_1, V_2, V_3\}$ une base propre de \mathbb{R}^3 associée aux v.p $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ de A . La S.G de (S) est

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3; Y_i = e^{\lambda_i \cdot t} \cdot V_i$$

(b) Si A n'est pas diagonalisable :

- i. Si $P_A(\lambda)$ n'est pas scindé, on a λ_1 une v.p réelle et $\lambda_2, \overline{\lambda_2}$ deux v.p complexes de A . Soit V_1 et V_2 deux vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 respectivement.

$$Y_1 = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot V_1, Y_2 = \text{Re}(e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot V_2), Y_3 = \text{Im}(e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot V_2)$$

La S.G. de (S) est $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$.

- ii. Si $P_A(\lambda)$ est scindé mais $\dim E_{\lambda_i} \neq \text{mult}(\lambda_i)$:

- Si on a λ_1 v.p simple et λ_2 v.p double avec $E_{\lambda_i} = \langle V_i \rangle, i = 1, 2$: Soit V_3 tel que

$$(A - \lambda_2 I)V_3 = V_2$$

et soit

$$Y_1 = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot V_1, Y_2 = e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot V_2, Y_3 = (V_2 \cdot t + V_3) e^{\lambda_2 \cdot t}.$$

La S.G de (S) est $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$.

- Si on a λ est une v.p de A de multiplicité 3 alors on a deux cas :

- $E_\lambda = \langle V_1, V_2 \rangle$: Dans ce cas on considère V_3 tel que $(A - \lambda_2 I)V_3 = V_2$

$$Y_1 = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot V_1, Y_2 = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot V_2, Y_3 = (V_2 \cdot t + V_3) e^{\lambda_2 \cdot t}.$$

La S.G de (S) est $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$.

► $E_\lambda = \langle V_1 \rangle$: Dans ce cas on considère V_2 tel que $(A - \lambda I)V_2 = V_1$ on prend V_3 tel que $(A - \lambda I)V_3 = V_2$

$$Y_1 = e^{\lambda \cdot t} \cdot V_1, Y_2 = e^{\lambda \cdot t} \cdot (V_1 \cdot t + V_2), Y_3 = (V_1 \cdot \frac{t^2}{2} + V_2 \cdot t + V_3) e^{\lambda \cdot t}$$

La S.G de (S) est $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$.

Rappel 2 :

1. Une courbe intégrale (γ) de X est

$$\gamma : \begin{array}{l}]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longrightarrow (x(t), y(t)) \end{array}$$

telle que $\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma(t))$ et $\gamma(0) = (x, y)$

2. La solution générale de $x'' + x = 0$ est $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Rappel 3 :

1. F est un s.e.v d'un e.v E si ($F \neq \Phi$; si $u, v \in F$ alors $u + v \in F$; si $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u \in F$)
2. Si F est un s.e.v de E et $\dim F = \dim E$ alors $F = E$
3. $\{v_1 \cdots v_n\}$ est une base de F si $\{v_1 \cdots v_n\}$ engendre F , c'est à dire $\forall X \in F, X$ s'écrit

$$X = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

où les $a_i \in \mathbb{R}$ et si $\{v_1 \cdots v_n\}$ est libre c'est à dire si $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ alors tous les $a_i = 0$. Dans ce cas $\dim F = n$.

Rappel 4 :

1. \langle , \rangle est un produit scalaire s'il est bilinéaire, symétrique et défini positif
2. Si A est une matrice qui définit le produit scalaire \langle , \rangle alors $\langle X, Y \rangle = {}^t X.A.Y$
3. L'application tangente f_* n'est autre que le Jacobien de f
4. $\{e_i\}$ est une base orthogonale relativement à \langle , \rangle si $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \forall i \neq j$
5. Procédé de Schmidt : Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base non orthogonale alors on pose

$$\varepsilon_1 = v_1, \varepsilon_2 = v_2 + \lambda \varepsilon_1 \text{ où } \lambda = -\frac{\langle v_2, \varepsilon_1 \rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}$$

sachant que $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$. Aussi, $\varepsilon_3 = v_3 + \lambda \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2$ avec

$$\lambda = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_1 \rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}, \quad \mu = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_2 \rangle}{\|\varepsilon_2\|^2}$$

On obtient $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ comme une base orthogonale

6. Si

$$h = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$$

est une métrique canonique définie sur une base orthogonale $\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3} \right\}$ alors

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} e_3$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est l'orthonormalisée de $\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3} \right\}$