

Mathématiques Appliquées (LBC101)

Final 2018-2019 ⌚ 3h :00

Centre de : Beyrouth



Documents Autorisés : Calculatrice non programmable



En Annexe un formulaire regroupant les algorithmes et les principaux résultats

Examen proposé par : J.SAAB au centre de Beyrouth et les antennes regionales

**Exercice 1 (40 points)** On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y - z, -x - 2y + 2z, -x - 3y + 3z)$$

1. Donner la matrice de  $f$ ,  $A = M(f)$ , dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer  $\text{Im } f$  et  $\text{ker } f$ , en donner une interprétation géométrique. Trouver une base de chacun d'eux.
3.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
4. Dédurre  $|A|$ , le déterminant de  $A$
5. Montrer que le polynôme caractéristique de  $A$  est  $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda$ , en déduire les **valeurs propres** de  $A$  et les **vecteurs propres** associés.
6. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse !
7. Soit  $B = B_1 \cup B_2$  une base de  $\mathbb{R}^3$  où  $B_1$  est une base de  $\text{Im } f$  et  $B_2$  est une base de  $\text{ker } f$ . Donner la matrice de passage de  $B_0$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à  $B$ .
8. Dédurre les composantes de  $X = e_1 + 2e_2 - e_3$  sur  $B$ .
9. On considère le système différentiel linéaire homogène donné par  $\frac{dX}{dt} = AX$  où  $X(t) =$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}; \text{ soit}$$

$$(S) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = -1 - 3y + 3z \end{cases}$$

Trouver la solution générale de (S).

**Exercice 2 (15 points)** : Soit  $X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

1. Ecrire le système différentiel linéaire de premier ordre relatif aux courbes intégrales  $(c_{(x,y)}(t))$  de  $X$

2. Vérifier que ce système différentiel est équivalent à

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) &= 0 \\ x(t) &= y'(t) \\ c_{(x,y)}(0) &= (x, y) \end{cases}$$

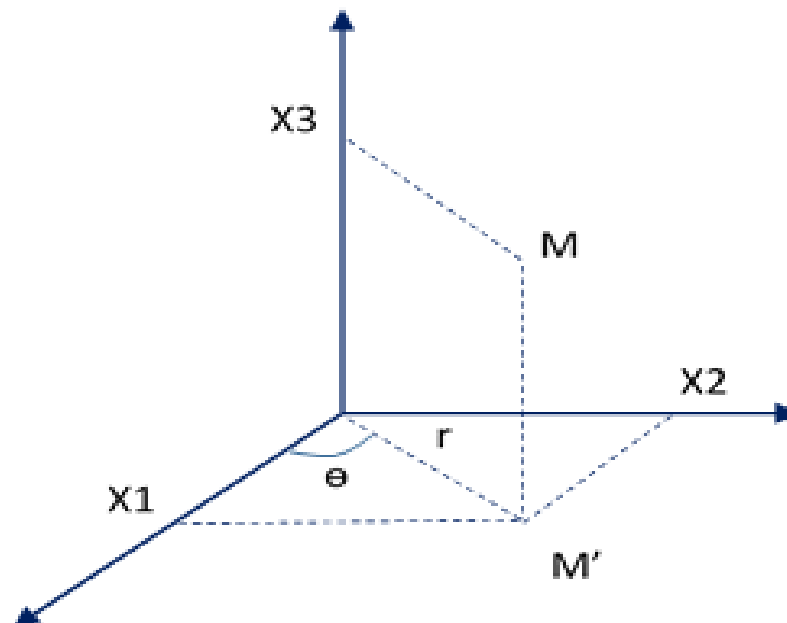
3. Déterminer les courbe intégrales de  $X$  et vérifier qu'elles sont des hyperboles ou des lignes droites.

**Exercice 3 (45 points)** On considère l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de ses coordonnées cartésiennes ( $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ). L'espace des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $\chi(\mathbb{R}^3)$  est engendré par la base  $\{e_x = \frac{\partial}{\partial x}, e_y = \frac{\partial}{\partial y}, e_z = \frac{\partial}{\partial z}\}$ . On considère la forme bilinéaire  $g$  sur  $\chi(\mathbb{R}^3)$  donnée par la matrice

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $g$  définit un produit scalaire sur  $\chi(\mathbb{R}^3)$
2. Soit  $X = X^1 \frac{\partial}{\partial x} + X^2 \frac{\partial}{\partial y} + X^3 \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $Y = Y^1 \frac{\partial}{\partial x} + Y^2 \frac{\partial}{\partial y} + Y^3 \frac{\partial}{\partial z} \in \chi(\mathbb{R}^3)$ . Donner le produit scalaire  $\langle X, Y \rangle = g(X, Y)$ .
3. Exprimer  $g$  sous la forme tensorielle
4. Soit  $f$  l'application du changement de variable associé aux coordonnées cylindriques

$$f : \begin{array}{l} U = ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \\ (y_1 = r, y_2 = \theta, y_3 = z) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \\ (x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, x_3 = z) \end{array}$$



c'est à dire pour  $M(x_1, x_2, x_3)$ ,  $M'(x_1, x_2, 0)$  on a  $\theta = (\overrightarrow{ox_1}, \overrightarrow{oM'})$ ,  $r = \|\overrightarrow{oM'}\|$ ,  $z = x_3$ .  
L'application  $f$  permet de transporter la métrique  $g$  définie sur  $(\mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3))$  en une métrique  $h$  définie sur  $(\mathbb{R}^3, (r, \theta, z))$  grâce à l'équation

$$h_{ij} = h\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle := g\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\right)$$

- Donner les composantes de  $f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$  dans la base  $\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\right\}$  pour  $i, j = 1, 2, 3$ .
- Donner la matrice de la métrique  $h$  et exprimer  $h$  sous la forme tensorielle. En déduire que  $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$  n'est pas une base orthogonale de  $\chi(U)$ .
- Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour trouver  $\{e_1 = e_r, e_2 = e_\theta, e_3 = e_z\}$  la base orthogonale de  $\chi(\mathbb{R}^3)$  obtenue à partir de la base  $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ .
- Soit  $L$  la métrique  $h$  dans la base orthogonale  $\{e_r, e_\theta, e_z\}$  c'est à dire  $L = (l_{ij})$  avec  $l_{ij} = h(e_i, e_j)$ . Donner la matrice  $L$ .
- Soit  $t$  le champ scalaire défini sur  $(E, (r, \theta, z))$  par

$$t(r, \theta, z) = r^2 \cos \theta + z^3$$

Donner le gradient de  $t$ .

- Bonus : On rappelle que  $e_r \otimes e_z \in \otimes_2^0 E^*$ . Donner la matrice de  $e_r \otimes e_z$  sachant que  $\{dr, d\theta, dz\}$  est une base duale de  $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ .



## Formulaires



Exercice 1 :

- l'endomorphisme  $f$  est injectif si  $\ker f = \{0\}$  et elle est surjectif si  $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$
- La matrice de  $f$  est inversible si  $f$  est injectif et surjectif
- Si  $X = (x_i)_B = (x'_i)_{B'}$  où  $B$  et  $B'$  sont deux bases et  $P = P_{B \rightarrow B'}$  alors  $(x'_i) = P^{-1} \cdot (x_i)$
- Système différentiel  $(S) : \frac{dX(t)}{dt} = AX$  :

- Si  $A$  est diagonalisable on a  $\{V_1, V_2, V_3\}$  une base propre de  $\mathbb{R}^3$  associée aux v.p  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  de  $A$ . La S.G de  $(S)$  est

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3; Y_i = e^{\lambda_i \cdot t} \cdot V_i$$

- Si  $A$  n'est pas diagonalisable :

- Si  $P_A(\lambda)$  n'est pas scindé, on a  $\lambda_1$  une v.p réelle et  $\lambda_2, \overline{\lambda_2}$  deux v.p complexes de  $A$ . Soit  $V_1$  et  $V_2$  deux vecteurs propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  respectivement.

$$Y_1 = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot V_1, Y_2 = \text{Re}(e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot V_2), Y_3 = \text{Im}(e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot V_2)$$

La S.G. de  $(S)$  est  $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$ .

ii. Si  $P_A(\lambda)$  est scindé mais  $\dim E_{\lambda_i} \neq \text{mult}(\lambda_i)$  :

- Si on a  $\lambda_1$  v.p simple et  $\lambda_2$  v.p double avec  $E_{\lambda_i} = \langle V_i \rangle, i = 1, 2$  : Soit  $V_3$  tel que

$$(A - \lambda_2 I)V_3 = V_2$$

et soit

$$Y_1 = e^{\lambda_1.t}.V_1, Y_2 = e^{\lambda_2.t}.V_2, Y_3 = (V_2.t + V_3)e^{\lambda_2.t}.$$

La S.G de  $(S)$  est  $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$ .

- Si on a  $\lambda$  est une v.p de  $A$  de multiplicité 3 alors on a deux cas :

►  $E_\lambda = \langle V_1, V_2 \rangle$  : Dans ce cas on considère  $V_3$  tel que  $(A - \lambda_2 I)V_3 = V_2$

$$Y_1 = e^{\lambda_1.t}.V_1, Y_2 = e^{\lambda_1.t}.V_2, Y_3 = (V_2.t + V_3)e^{\lambda_2.t}.$$

La S.G de  $(S)$  est  $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$ .

►  $E_\lambda = \langle V_1 \rangle$  : Dans ce cas on considère  $V_2$  tel que  $(A - \lambda I)V_2 = V_1$  on prend  $V_3$  tel que  $(A - \lambda I)V_3 = V_2$

$$Y_1 = e^{\lambda.t}.V_1, Y_2 = e^{\lambda.t}.(V_1.t + V_2), Y_3 = (V_1.\frac{t^2}{2} + V_2.t + V_3)e^{\lambda.t}$$

La S.G de  $(S)$  est  $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$ .

Exercice 2 :

1. Une courbe intégrale  $(\gamma)$  de  $X$  est

$$\begin{aligned} \gamma : ]a, b[ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

telle que  $\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma(t))$  et  $\gamma(0) = (x, y)$

2. La solution générale de  $y'' - y = 0$  est  $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$  avec  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Exercice 3 :

1.  $\langle, \rangle$  est un produit scalaire s'il est bilinéaire, symétrique et défini positif

2. Si  $A$  est une matrice qui définit le produit scalaire  $\langle, \rangle$  alors  $\langle X, Y \rangle = {}^t X.A.Y$

3. L'application tangente  $f_*$  n'est autre que le Jacobien de  $f$

4.  $\{e_i\}$  est une base orthogonale relativement à  $\langle, \rangle$  si  $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \forall i \neq j$

5. Procédé de Schmidt : Si  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une base non orthogonale alors on pose

$$\varepsilon_1 = v_1, \varepsilon_2 = v_2 + \lambda \varepsilon_1 \text{ où } \lambda = -\frac{\langle v_2, \varepsilon_1 \rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}$$

sachant que  $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$ . Aussi,  $\varepsilon_3 = v_3 + \lambda \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2$  avec

$$\lambda = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_1 \rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}, \quad \mu = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_2 \rangle}{\|\varepsilon_2\|^2}$$

On obtient  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$  comme une base orthogonale

6. Si

$$h = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$$

est une métrique canonique définie sur une base orthogonale  $\{\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3}\}$  alors

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} e_3$$

où  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est l'orthonormalisée de  $\{\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3}\}$